وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عدد احاطه‌ای اکثریت در گراف‌ها

استاد راهنما :

دکتر سیدمحمود شیخ‌الاسلامی

استاد مشاور :

آقای بهروز خیرفام

پژوهشگر :

رضا ساعی دینور

دی ماه/ ۱۳۸۶

تبریز/ ایران

بسم اللّه الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادرم

قدردانی

اکنون که به شکرانه‌ی الهی و در سایه ایزد منان، این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این تحقیق بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

از استاد محترم جناب آقای دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی که به عنوان استاد راهنما بسیار بیشتر از آن‌چه که می‌باید به بنده لطف داشته‌اند و در مقابل خطاهای بسیار و سوالات وقت و بی‌وقت در کمال صمیمیت، حوصله و سخاوت پاسخ‌گو و راهنما بوده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم و به خاطر آموخته‌های بسیار و هدایت آگاهانه در مسیر تحقیق و پژوهش، سپاسگزار زحمات‌شان هستم.
از استاد مشاور جناب آقای بهروز خیرفام که مرا در انجام این پایان‌نامه همراهی کردند تشکر می‌کنم.

از جناب آقای دکتر رضاپور و آقای دکتر امجدی به‌خاطر داوری این پایان‌نامه و از تمامی اساتید گروه ریاضی دانشگاه به‌خاطر رفتار گرم و صمیمانه‌شان سپاسگزارم.

و در نهایت قدردانی خود را از سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیل افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و خانواده عزیزم، به خصوص پدر و مادر گرامی که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند، ابراز می‌دارم.

رضا ساعی دینور
دی‌ماه ۱۳۸٦
تبریز، ایران

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید G یک گراف با مجموعه‌ی راس‌های $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های $E(G)$ باشد. تابع $f : V(G) \to \{-1, 1\}$ یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G نامیده می‌شود هرگاه برای حداقل نصف راس‌های v از G، $\sum_{u\in N[v]} f(u) \geq 1$.

مقدار $min\{\sum_{v\in V(G)} f(v) |$ f یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است$\}$ را عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار نامیده و با $\gamma_{maj}(G)$ نشان می‌دهند. هرگاه برای حداقل بیش از نصف راس‌های v از G، $\sum_{u\in N[v]} f(u) \geq 1$، در این صورت f یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار روی G نامیده می‌شود. مقدار $min\{\sum_{v\in V(G)} f(v) |$ f یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار روی G است$\}$ را عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار می‌نامند و با $\gamma^s_{maj}(G)$ نشان می‌دهند.

هم‌چنین f یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار از G نامیده می‌شود هرگاه برای حداقل k راس v از G، $\sum_{u\in N[v]} f(u) \geq 1$. عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار، $\gamma_{ks}(G)$، عبارت است از $min\{\sum_{v\in V(G)} f(v) |$ f یک تابع k-زیراحاطه‌گر علامت‌دار از G است$\}$.

در این پایان‌نامه و در فصل‌های ۲،۳ و ۴، تمام نتایج موجود در مورد این سه پارامتر احاطه‌ای را بیان می‌کنیم. در فصل‌های پنجم و ششم برای اولین بار، به‌ترتیب، مفاهیم $k-$ زیراحاطه‌ی یالی علامت‌دار و $k-$ زیراحاطه‌ی ستاره‌ی علامت‌دار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. تابع $f : E(G) \to \{-1, 1\}$ را یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار از G گوییم، هرگاه حداقل برای k یال e از G، $\sum_{e'\in N[e]} f(e') \geq 1$. مقدار $min \sum_{e\in E(G)} f(e)$، که در آن مینیمم روی تمامی توابع $k-$ زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار از G گرفته می‌شود، را عدد $k-$ زیراحاطه‌ای یالی علامت‌دار

نامیده و با $\gamma'_{ks}(G)$ نشان می‌دهیم. هرگاه برای حداقل k راس v از G، $\sum_{e\in E[v]} f(e) \geq 1$، که در آن $\{uv$ عضو $E(v) = \{uv|E(G)$ ، آن‌گاه f را یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار از G می‌نامیم. عدد $k-$ زیراحاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار G، $\gamma^k_{ss}(G)$، عبارت است از $min \sum_{e\in E(G)} f(e)$، که در آن مینیمم روی تمامی توابع $k-$ زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار از G گرفته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار، عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار، تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار، عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار، تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار، عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار، تابع $k-$ زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار، عدد $k-$ زیراحاطه‌ای یالی علامت‌دار، تابع $k-$ زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار، عدد $k-$ زیراحاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار.

پیشگفتار

مساله وزیرهای احاطه‌گر را می‌توان نقطه‌ی آغازین مطالعه روی مجموعه‌های احاطه‌گر دانست. طبق قوانین شطرنج یک وزیر می‌تواند در یک حرکت، هر تعداد مربع افقی، عمودی، یا قطری را طی کند (با فرض این که هیچ مهره‌ای سر راهش نباشد). در سال ۱۸۵۰ میلادی، مساله‌ی تعیین کمترین تعداد وزیرهایی که بتوانند همه‌ی مربعات صفحه‌ی شطرنج را احاطه کنند از سوی مشتاقان این بازی در اروپا مطرح شد. در همان سال ثابت شد که کمترین تعداد برابر ۵ است.

بررسی علمی مجموعه های احاطه‌گر و عدد احاطه‌ای در گراف‌ها به سال ۱۹۶۰ برمی‌گردد.

در دنیای اطراف ما مسایل و فرآیندهایی وجود دارند که می‌توان آنها را با نموداری متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که برخی از این نقاط را به هم وصل می‌کنند، نمایش داد. به عنوان مثال در یک شبکه ارتباطی، برای نشان دادن مراکز از نقاط و برای نشان دادن ارتباط بین دو مرکز از خطوطی که این نقاط را به هم وصل می‌کنند، استفاده می‌کنیم. در چنین نموداری آنچه که اهمیت دارد، این است که آیا بین دو نقطه داده شده خطی وجود دارد یا نه. مطالعه این نمودارها و مسایل مربوط به آنها، به مفهوم گراف منتهی می‌گردد. زیرمجموعه‌ی $S \subseteq V$ در گراف $G = (V, E)$ یک **مجموعه‌ی احاطه‌گر** G نامیده می‌شود، هرگاه هر راس $v \in V - S$، با عضوی از S مجاور باشد. یک مجموعه‌ی احاطه‌گر از G را مینیمال گوییم هرگاه هیچ زیرمجموعه‌ی واقعی از S، مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G نباشد. مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال G را عدد احاطه‌ای G می‌نامند.

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با مجموعه‌ی راس‌های V و مجموعه‌ی یال‌های E باشد. برای هر راس $v \in V$ **همسایگی باز** v عبارت است از $N(v) = \{u \mid uv \in E\}$، و **همسایگی بسته‌ی** v عبارت

است از $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. برای زیرمجموعه‌ی S از V همسایگی باز S مجموعه‌ی $\bigcup_{v\in S} N(v)$ و همسایگی بسته S، مجموعه‌ی $N[S] = (\bigcup_{v\in S} N(v)) \cup S$ تعریف می‌شود. برای هر تابع حقیقی $f : V \to R$ و $S \subseteq V$، تعریف می‌کنیم $f(S) = \sum_{u\in S} f(u)$. $f(V)$ را وزن f نامیده و با $w(f)$ نشان می‌دهیم. گوییم راس v توسط f پوشیده می‌شود هرگاه $f(N[v]) \geq ۱$. مجموعه‌ی راس‌هایی که توسط f پوشانده می شوند را با C_f نشان می‌دهیم. با توجه به تعاریف فوق می‌توان مجموعه‌ی احاطه‌گر و عدد احاطه‌ای را به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد.

تابع $f : V(G) \to \{۰, ۱\}$ را یک تابع احاطه‌گر برای G گوییم هرگاه همه راس‌های G توسط f پوشانده شوند. تابع احاطه‌گر f را مینیمال گویند هرگاه هیچ تابع احاطه‌گر g از G موجود نباشد که $w(g) < w(f)$. وزن توابع احاطه‌گر، عدد احاطه‌ای G می‌باشد. با کمی دقت معلوم می‌شود که تعاریف فوق هم‌ارز تعریف قبلی است و مجموعه‌ی راس‌هایی که برای آنها تابع مینیمال f عدد ۱ را نسبت می‌دهد، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال است.

با تعریف چنین تابعی راه برای توسیع مفهوم احاطه و احاطه‌گری هموار گشته و با تغییراتی در تابع تعریف شده در بالا می‌توان توابع احاطه‌گر و پارامترهای احاطه‌ای جدیدی را تعریف کرد.

تابع $f : V \to \{-۱, ۱\}$ را یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار برای G گوییم هرگاه حداقل k تا از راس‌های G توسط f پوشانده شوند. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار مینیمال و وزن یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار مینیمال را عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار می‌نامند. هرگاه $k = n$، تابع f را یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار و در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند، تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمال و وزن یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمال را عدد احاطه‌ای علامت‌دار می‌نامند. هرگاه $k = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$، تابع f را یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار و در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال و وزن یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال را عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار می‌نامند. هرگاه $k = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$، تابع f را یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار و در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند تابع احاطه‌گر اکثریت اکید

علامت‌دار مینیمال و وزن یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار مینیمال را عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار می‌نامند.

پایان نامه‌ی حاضر بیان تفصیلی مقالات [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۹]، [۱۰] و [۱۱] است و به‌صورت زیر تنظیم شده است: در فصل اول تعاریف مورد نیاز از نظریه‌ی گراف و احاطه‌گرها را بیان خواهیم کرد. در فصل دوم مفهوم عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار همراه با قضایای اساسی آن ارایه می‌گردد. در فصل سوم مفهوم عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار و نتایج حاصل را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم مفهوم عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار را بررسی خواهیم کرد.

فصل پنجم و ششم حاصل تحقیقات استاد راهنما و نگارنده است که اختصاص به معرفی دو مفهوم جدید $k-$ زیراحاطه‌ی یالی علامت‌دار و $k-$ زیراحاطه‌ی ستاره‌ی علامت‌دار و نتایجی در مورد آن‌ها دارد.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مطرح می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و نمادهای اولیه که در این جا تعریف نشده‌اند، خواننده را به [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ **همسایگی باز** راس v از G، $N_G(v)$ ، مجموعه تمام راس‌هایی از G است که با v مجاوراند. به عبارت دیگر،

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

همسایگی بسته‌ی راس v عبارت است از $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

تعریف ۲.۱.۱ **همسایگی باز یال** e از G، $N_G(e)$ ، مجموعه‌ی تمام یال‌هایی از G است که با e راس مشترک دارند. **همسایگی بسته‌ی یال** e عبارت است از $N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}$

تعریف ۳.۱.۱ **همسایه‌ی یالی یک راس** مجموعه‌ی یال‌هایی است که به آن راس متصل هستند. این مجموعه را برای راس $v \in V$ با $E_G(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ گراف حاصل شده از اجتماع گراف‌های مجزای راسی G و H را **اجتماع مجزای** G و H نامیده و با $G \cup H$ نشان می‌دهیم. واضح است که $K_m \cup K_n = K^c_{m,n}$.

تعریف ۵.۱.۱ **الحاق** دو گراف مجزای G و H، $G \vee H$، گرافی است که از $G \cup H$ با وصل کردن هر راس G به هر راس H حاصل می‌شود. به عنوان مثال داریم $K_{m,n} = K^c_m \vee K^c_n$.

تعریف ۶.۱.۱ برای دو گراف دلخواه $G_۱$ و $G_۲$ **حاصل ضرب دکارتی** $G = G_۱ \Box G_۲$، گرافی است با مجموعه‌ی راس‌های $V(G) = V(G_۱) \times V(G_۲)$ و دو راس $(u_۱, u_۲)$ و $(v_۱, v_۲)$ از G مجاورند اگر و تنها اگر $u_۱ = v_۱$ و $u_۲v_۲ \in E(G_۲)$ یا $u_۲ = v_۲$ و $u_۱v_۱ \in E(G_۱)$. واضح است که برای هر راس $v \in V(G_۲)$، $(G_۱ \Box G_۲)[S] \cong G_۱$ که در آن $S = \{(u, v) \in V(G_۱ \Box G_۲)\}$. به طور مشابه، برای هر راس $u \in V(G_۱)$، $(G_۱ \Box G_۲)[T] \cong G_۲$ که در آن $T = \{(u, v) \in V(G_۱ \Box G_۲)\}$.

تعریف ۷.۱.۱ **گراف یالی** یک گراف G، گراف ساده‌ای است که مجموعه‌ی راس‌های آن $E(G)$ است و e و e' مجاورند اگر و فقط اگر راس مشترکی در G داشته باشند. گراف یالی G را با $L(G)$ نشان می‌دهند. از تعریف بدیهی است که $L(P_n) = P_{n-۱}$، $L(C_n) = C_n$ و $L(K_{۱,n}) = K_n$.

۲.۱ مفاهیم احاطه‌گری

تعریف ۱.۲.۱ برای هر تابع حقیقی $f : V(G) \to R$ و زیرمجموعه‌ی $S \subseteq V$، تعریف می‌کنیم $f(S) = \sum_{u \in S} f(u)$. وزن f را $f(V(G))$ تعریف کرده و با $w_G(f)$ یا $w(f)$ نشان می‌دهیم. گوییم راس v توسط f **پوشانده** می‌شود هرگاه $f(N[v]) \geq ۱$. مجموعه‌ی راس‌هایی که توسط f پوشانده می شوند با C_f نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ تابع $f : V \to \{-۱, ۱\}$ را یک **تابع احاطه‌گر علامت‌دار** (SDF) برای G گوییم هرگاه همه‌ی راس‌های G توسط f پوشانده شوند. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمال** یا $\gamma_s(G)$ − **تابع** نامیده می‌شوند. وزن تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمال را **عدد احاطه‌ای علامت‌دار** نامیده و با $\gamma_s(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ برای هر تابع حقیقی $f : E(G) \to R$ و زیرمجموعه‌ی $S \subseteq E$، تعریف می‌کنیم $f(S) = \sum_{e \in S} f(e)$. وزن f را $f(E(G))$ تعریف کرده و با $w_G(f)$ یا $w(f)$ نشان می‌دهیم. گوییم یال e توسط f **پوشانده** می‌شود هرگاه $f(N[e]) \geq ۱$. مجموعه‌ی یال‌هایی که توسط f پوشانده می‌شوند با C_f نشان داده می‌شود. هم‌چنین گوییم راس v توسط f **پوشانده** می‌شود هرگاه $f(E(v)) \geq ۱$. مجموعه‌ی راس‌هایی که توسط f پوشانده می‌شوند را با V_f^+ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۲.۱ گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. تابع $f : E(G) \to \{-۱, ۱\}$ را یک **تابع احاطه‌گر یالی علامت‌دار** ($SEDF$) برای G گوییم هرگاه یال‌های G توسط f پوشانده شوند. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع احاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمال** یا

$\gamma'_s(G)$ — **تابع** نامیده می‌شوند. وزن تابع احاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمال را **عدد احاطه‌ای یالی علامت‌دار** نامیده و با $\gamma'_s(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱ تابع $f : E \to \{-1, 1\}$ را یک **تابع احاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار** $(SSDF)$ برای G گوییم هرگاه راس‌های G توسط f پوشانده شوند. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع احاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار مینیمال** یا $\gamma_{ss}(G)$ — **تابع** نامیده می‌شوند. وزن تابع احاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار مینیمال را **عدد احاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار** نامیده و با $\gamma_{ss}(G)$ نشان داده می‌شود.

فصل ۲

احاطه‌ی اکثریت علامت‌دار

مقدمه

گیرید G یک گراف ساده از مرتبه‌ی n باشد. تابع $f: V(G) \to \{-۱, ۱\}$ را یک **تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار** ($SMDF$) برای G گوییم هرگاه حداقل نصف راس‌های G توسط f پوشانده شوند. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال** یا $\gamma_{maj}(G)$ − **تابع** نامیده می‌شوند. وزن یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال را **عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار** نامیده و با $\gamma_{maj}(G)$ نشان می‌دهند. اگر f یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار از G باشد آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$P_f = \{v \in V(G) | f(v) = +۱\},$$

$$M_f = \{v \in V(G) | f(v) = -۱\},$$

$$C_f = \{v \in V(G) | f(N[v]) \geq ۱\}.$$

هم‌چنین تعریف می‌کنیم $P_f^+ = P_f \cap C_f$، $P_f^- = P_f - P_f^+$، $M_f^+ = M_f \cap C_f$ و $M_f^- = M_f - M_f^+$.

۱.۲ عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار برای خانواده‌ی گراف‌های خاص

در این بخش عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار بعضی خانواده از گراف‌ها را تعیین می‌کنیم.

لم ۱.۱.۲ هرگاه g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی گراف n راسی G باشد آن‌گاه $w(g)$ و n از نظر زوجیت (زوج یا فرد بودن) یکی است.

لم ۲.۱.۲ اگر g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال روی گراف G باشد، آن‌گاه برای راس $v \in V$ با $g(v) = ۱$، راسی از $N[v]$ چون u وجود دارد به‌طوری‌که $g(N[u]) \in \{۱, ۲\}$.

برهان. فرض کنید g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال روی G باشد. گیرید حکم برقرار نباشد و برای راسی چون $v \in V$، $g(v) = ۱$ و به ازای هر $u \in N[v]$، $g(N[u]) \notin \{۱, ۲\}$. تابع $f : V(G) \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید: $f(v) = -۱$ و برای هر $u \in V - \{v\}$، $f(u) = g(u)$. حال برای هر $u \in N[v]$، یا $g(V[u]) \leq ۰$ است که در این حالت $-۲ = ۲ - ۰ \leq ۲ - g(N[u]) = f(N[u])$ یا $g(N[u]) \geq ۳$ که در این حالت $f(N[u]) \geq ۱$ است. از طرف دیگر برای هر $w \notin N[v]$، $f(N[w]) = g(N[w])$. از اینرو f یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است به‌طوری که $f(V) < g(V)$ و این با مینیمال بودن g در تناقض است. ■

قضیه‌ی اول عدد احاطه‌ای علامت‌دار مسیرها را تعیین می‌کند که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۲ [۵] برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، $\gamma_s(P_n) = n - ۲\lfloor \frac{n-۲}{۳} \rfloor$.

گزاره ۱.۱.۲ برای هر عدد صحیح $n \geq ۳$ داریم

$$\gamma_{maj}(P_n) = \begin{cases} -۲\lfloor \frac{n-۴}{۶} \rfloor & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ ۱ - ۲\lfloor \frac{n-۳}{۶} \rfloor & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \quad (۱)$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که مقادیر طرف راست در (۱)، یک کران بالا برای $\gamma_{maj}(P_n)$ هستند. فرض کنید $T_۱$ مسیری با $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ راس و $T_۲$ مسیری با $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ راس باشد. گیرید P_n مسیری با n راس باشد که با وصل کردن یک راس انتهایی $T_۱$ به یک راس انتهایی از $T_۲$ به‌دست آمده است. فرض کنید f یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمال روی $T_۱$ باشد. توجه کنید که f به دو راس انتهایی $T_۱$ و همسایه‌های آن‌ها مقدار ۱+ نسبت می‌دهد. حال نگاشت $g : V(P_n) \to \{-۱, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف کنید: به ازای هر $v \in V(T_۱)$، $g(v) = f(v)$ و اگر $v \in V(T_۲)$، $g(v) = -۱$. در این‌صورت برای هر راس $v \in V(T_۱)$، $g(N[v]) \geq ۱$ و برای هر راس $u \in V(T_۲)$، $g(N[u]) \leq ۰$. چون $|V(T_۱)| \geq |V(T_۲)|$ نتیجه می‌شود که g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی P_n است. بنابراین

$$\gamma_{maj}(T) \leq g(V) = \gamma_s(P_{\lceil \frac{n}{۲} \rceil}) - \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor.$$

قضیه‌ی ۱.۱.۲ همراه با رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد که

$$\gamma_{maj}(p_n) \leq \begin{cases} -۲\lfloor \frac{n-۴}{۶} \rfloor & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ ۱ - ۲\lfloor \frac{n-۳}{۶} \rfloor & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

حال نشان می‌دهیم که مقادیر طرف راست در (۱)، یک کران پایین برای $\gamma_{maj}(P_n)$ می‌باشند. برای این منظور، فرض کنید g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال روی P_n باشد. در این‌صورت $|P_g| + |M_g| = n$. به‌علاوه، $P = P^+ \cup P^-$ و $M = M^+ \cup M^-$.

به‌وضوح، هر راس از P^- در $P_n - M$ منفرد است، در حالی که هر راس از P^+ متعلق به یک مولفه از $P_n - M$ از مرتبه‌ی حداقل دو می‌باشد. فرض کنید $T_۱, ..., T_r$ ($r \geq ۱$)، مولفه‌های $P_n - M$ از مرتبه‌ی حداقل ۲ باشند. برای هر مولفه‌ی T_i $(۱ \leq i \leq r)$، یک راس v_i نظیر کرده و فرض می‌کنیم $X = \{v_۱, ..., v_r\}$. حال یک گراف دو پارچه‌ی H با بخش‌های $X \cup P^-$ و M^+ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

v_i را به راس $u \in M^+$ وصل می‌کنیم هرگاه u با راسی از T_i مجاور باشد و $w \in P^-$ را به $u \in M^+$

وصل می‌کنیم هرگاه $uw \in E(T)$.

واضح است که H بی‌دور است. بنابراین $|V(H)| \geq |E(H)| + ۱$. $|E(H)|$ تعداد یال‌های P_n است که یک سر آن در M^+ و سر دیگر آن در P است. چون هر راس از M^+ دقیقا با دو راس از P مجاور است، $|E(H)| = ۲|M^+|$. به علاوه، $|V(H)| = |P^-| + |X| + |M^+|$.

بدین ترتیب $|P^-| + |X| + |M^+| \geq ۲|M^+| + ۱$ و در نتیجه $|X| \geq |M^+| - |P^-| + ۱$. بنابراین حداقل $|M^+| - |P^-| + ۱$ مولفه در $P_n - M$ از مرتبه‌ی حداقل دو می‌باشد. چون هر یک از این مولفه‌ها شامل حداقل دو راس از P^+ است، خواهیم داشت $|P| \geq |P^+| \geq ۲(|M^+| - |P^-| + ۱)$.

چون g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی P_n است، حداقل نصف همسایگی‌های بسته تحت g، دارای مجموع حداقل یک هستند. بنابراین $|M^+| + |P^+| \geq \lceil \frac{|V(P_n)|}{۲} \rceil = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$ یا $|M^+| \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil - |P^+| = \lceil \frac{n}{۲} \rceil - (|P| - |P^-|)$. این ایجاب می‌کند که $|M^+| - |P^-| \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil - |P|$.

بدین ترتیب $|P| \geq ۲(|M^+| - |P^-| + ۱) \geq ۲(\lceil \frac{n}{۲} \rceil - |P|) + ۲$ یا به‌طور معادل $|P| \geq \frac{۲\lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۲}{۳}$.

ابتدا فرض کنید $n = ۲k$ ($k \geq ۲$). در این‌صورت $|P| \geq \frac{۲k+۲}{۳}$ و لذا $|P| \geq \lceil \frac{۲k+۲}{۳} \rceil$. بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma_{maj}(P_n) &= |P| - |M| = |P| - (n - |P|) = ۲|P| - n \\ &\geq ۲\lceil \tfrac{۲k+۲}{۳} \rceil - ۲k = -۲(k - \lceil \tfrac{۲k+۲}{۳} \rceil) = -۲\lfloor \tfrac{k-۲}{۳} \rfloor = -۲\lfloor \tfrac{n-۴}{۶} \rfloor\end{aligned}$$

حال گیرید $n = ۲k + ۱$ ($k \geq ۱$). در این‌صورت $|P| \geq \frac{۲k+۴}{۳}$ و لذا $|P| \geq \lceil \frac{۲k+۴}{۳} \rceil$. بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma_{maj}(P_n) &= ۲|P| - n \geq ۲\lceil \tfrac{۲k+۴}{۳} \rceil - (۲k + ۱) \\ &= -۱ - ۲(k - \lceil \tfrac{۲k+۴}{۳} \rceil) = ۱ - ۲\lfloor \tfrac{n-۳}{۶} \rfloor\end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. ■

گزاره ۲.۱.۲ برای هر عدد صحیح $n \geq ۳$، $\gamma_{maj}(C_n) = \gamma_{maj}(P_n)$.

برهان. فرض کنید P_n مسیر n راسی تعریف شده در قسمت اول برهان قضیه‌ی قبل باشد. گیرید g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی P_n بوده و G دوری با n راس باشد که از اتصال دو راس انتهایی P_n حاصل شده است. به وضوح، g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است.

بنابراین

$$\gamma_{maj}(C_n) = \gamma_{maj}(G) \leq g(V(G)) = \gamma_{maj}(P_n)$$

حال نشان می‌دهیم که $\gamma_{maj}(C_n) \geq \gamma_{maj}(P_n)$.

فرض کنید f یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمال روی G باشد. بنابر قضیه‌ی قبل به ازای $n \geq ۹$ داریم که $\gamma_{maj}(P_n) < ۰$. بنابراین $|P| - |M| = f(V) = \gamma_{maj}(G) \leq \gamma_{maj}(P_n) < ۰$ که ایجاب می‌کند $|M| > |P|$، اما این به‌آن معنی است که M شامل دو راس مجاور u و v است. حال $G - uv$ یک مسیر n راسی است. تعداد راس‌هایی چون v که $f(N[v]) \geq ۱$، در P_n و G برابرند. چون f یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است، لذا f یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی P_n می‌باشد. بنابراین برای $n \geq ۹$، $\gamma_{maj}(P_n) \leq f(V(G)) = \gamma_{maj}(C_n)$ لذا برای $n \geq ۹$،

$$\gamma_{maj}(C_n) = \gamma_{maj}(P_n)\ .$$

اثبات قضیه برای $n \leq ۸$، سرراست است و از آن صرف‌نظر می‌کنیم. ■

گزاره ۳.۱.۲

$$\gamma_{maj}(K_n) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۲ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

برهان. فرض کنید g یک $\gamma_{maj}(K_n)$ – تابع باشد. برای حداقل یک راس $v \in V$، داریم $g(V) = g(N[v]) \geq ۱$. چون $|P| + |M| = n$ و $|P| - |M| = g(V) \geq ۱$، نتیجه می‌شود $|P| \geq ۱ + |M| = ۱ + n - |P|$، در نتیجه $|P| \geq \lceil \frac{n+۱}{۲} \rceil$ و $|M| \leq \lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor$. بنابراین $\gamma_{maj}(K_n) = |P| - |M| \geq \lceil \frac{n+۱}{۲} \rceil - \lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor$. از طرف دیگر هر تابعی که به $\lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor$ راس ۱– و به بقیه‌ی راس‌ها ۱+ نسبت دهد به‌وضوح، یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار برای K_n با وزن

$\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - \lceil\frac{n+1}{2}\rceil$ است، لذا $\gamma_{maj}(K_n) \leq \lceil\frac{n+1}{2}\rceil - \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$. بنابراین $\gamma_{maj}(K_n) = \lceil\frac{n+1}{2}\rceil - \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$.
■

گزاره ۴.۱.۲ به ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$\gamma_{maj}(K_{1,n}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 2 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

برهان. به‌وضوح حکم برای $n = 1,2$ برقرار است. فرض کنید $n \geq 3$ و g یک $\gamma_{maj}(K_{1,n})$ – تابع باشد. فرض کنید v راس اتکای $K_{1,n}$ باشد. اگر $g(v) = -1$، آن‌گاه به ازای هر $u \in V(G) - \{v\}$، $g(N[u]) \leq 0$ که یک تناقض است. لذا $g(v) = +1$. حال برای این‌که برای راس $u \neq v$، $g(N[u]) \geq 1$، باید داشته باشیم $g(u) = 1$. حال چون برای $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ راس u که $u \neq v$ داریم $g(N[u]) \geq 1$، لذا برای $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ برگ، g مقدار $+1$ نسبت می‌دهد. پس $g(N[v]) = g(V(G)) \geq 1$. چون $|P|+|M| = n+1$ و $|P|-|M| = g(V) \geq 1$، لذا $|P| \geq 1+|M| = 1+(n+1-|P|)$، درنتیجه $|P| \geq \lceil\frac{n+2}{2}\rceil$ و $|M| = n+1-|P| \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. از این رو $\gamma_{maj}(K_{1,n}) = |P|-|M| \geq \lceil\frac{n+2}{2}\rceil - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. حال فرض کنید نگاشت $f : V(G) \to \{-1,1\}$ به $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ از برگ‌ها و v مقدار $+1$ و به $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ بقیه مقدار -1 نسبت بدهد. به‌وضوح f یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار برای $K_{1,n}$ است به‌طوری که $w(f) = \lceil\frac{n+2}{2}\rceil - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. بنابراین $\gamma_{maj}(K_{1,n}) = \lceil\frac{n+2}{2}\rceil - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. ■

قضیه ۲.۱.۲ فرض کنید $2 \leq m \leq n$. اگر G یک گراف از مرتبه‌ی m و $H = K_n^c \vee G$، آن‌گاه

$$\gamma_{maj}(H) = \begin{cases} 2-n & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ 3-n & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}. \qquad (2)$$

برهان. ابتدا فرض کنید $n > m$ و V_n و V_m به ترتیب معرف مجموعه‌ی راس‌های K_n^c و G باشند. فرض کنید g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی $K_{m,n}$ باشد که $g(V) = \gamma_{maj}(H)$. در این‌صورت طبق اصل لانه کبوتری، عضوی از V_n چون v وجود دارد به طوری که $g(N[v]) \geq ۱$. لذا داریم

$$g(V) = g(N[v]) + g(V_n - v) \geq ۱ - (n - ۱) = ۲ - n.$$

از لم ۱.۱.۲ وقتی m فرد است، $g(V) \geq ۳ - n$. بنابراین $\gamma_{maj}(H)$ حداقل برابر سمت راست رابطه‌ی (۲) است.

حال فرض می‌کنیم $n = m$. اگر عضوی از V_n چون v باشد که $g(N[v]) \geq ۱$، آن گاه مشابه آن‌چه در بالا گفتیم، برهان قضیه حاصل می‌شود. در غیر این صورت، یک عضو $v \in V_m$ موجود است که $g(N[v]) \geq ۱$. به علاوه، $g(V - N[v]) \geq -(m - ۱)$. پس $\gamma_{maj}(H) = g(V) = g(N[v]) + g(V - N[v]) \geq ۱ - (m - ۱) = ۲ - m = ۲ - n$. این ثابت می‌کند که $\gamma_{maj}(H)$ حداقل برابر طرف راست رابطه‌ی (۲) است.

در نهایت، تابع g را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$g(v) = \begin{cases} ۱ & \text{برای } \lceil \frac{m+۲}{۲} \rceil \text{ راس از } V_m \\ -۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

به‌وضوح g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی H است و $\gamma_{maj}(H)$ حداکثر برابر با طرف راست رابطه‌ی (۲) است و برهان تمام است. ■

نتیجه ۱.۱.۲ برای اعداد صحیح $n \geq m \geq ۲$،

$$\gamma_{maj}(K_{m,n}) = \begin{cases} ۲ - n & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ ۳ - n & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

نمادگذاری ۱.۱.۲ K_{ij} را برای نمایش $K_{i,i,\ldots,i}$ (j مرتبه) بکار می‌بریم.

نتیجه ۲.۱.۲ برای اعداد صحیح $n \geq m \geq ۲$،

$$\gamma_{maj}(K_{۱(m),n}) = \begin{cases} ۲-n & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ ۳-n & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

وقتی $n < m$ است، می‌توان عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار چنین گراف‌هایی را به دست آورد.

قضیه ۳.۱.۲ برای اعداد صحیح $m > n \geq ۱$،

$$\gamma_{maj}(K_{۱(m),n}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n+m \text{ فرد باشد} \\ ۲ & \text{اگر } n+m \text{ زوج باشد} \end{cases}. \qquad (۳)$$

برهان. فرض کنید G، V، V_n و V_m همانند برهان قضیه‌ی ۲.۱.۲ تعریف شده باشند. تابع g را روی V به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(v) = \begin{cases} ۱ & \text{برای } \lceil \frac{m+n+۱}{۲} \rceil \text{ راس از } V \\ -۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی V و $g(V)$ همان مقدار داده شده در طرف راست (۳) است.

حال فرض کنید g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی V باشد که $g(V) = \gamma_{maj}(G)$. چون $m > n$، طبق اصل لانه کبوتری، $v \in V_m$ وجود دارد که $g(N[v]) \geq ۱$ اما $g(V) = g(N[v]) \geq ۱$. توجه کنید که وقتی $m+n$ زوج باشد، $g(N[v]) \geq ۲$ و برهان تمام است. ■

در قضیه‌ی بعدی، گراف m پارچه‌ی کامل را در نظر می‌گیریم که هر پارچه‌ی آن از مرتبه‌ی n است.

قضیه ۴.۱.۲ برای اعداد صحیح $m \geq ۲$ و $n \geq ۳$،

$$\gamma_{maj}(K_{n^{(m)}}) = \begin{cases} ۲ - n & \text{اگر } n \text{ زوج و } m \text{ زوج باشد} \\ ۳ - n & \text{اگر } n \text{ فرد و } m \text{ زوج باشد} \\ ۴ - n & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $G = K_{n^{(m)}}$، V مجموعه‌ی راس‌های G و $V_۱, V_۲, ..., V_m$ بخش‌های مستقل n عضوی از $V(G)$ باشند. ابتدا فرض کنید m زوج است. نگاشت $g : V(G) \to \{-۱, ۱\}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(v) = \begin{cases} ۱ & \text{برای همه‌ی راس‌های } V_۱ \cup ... \cup V_{\frac{m}{۲}-۱} \\ ۱ & \text{برای } \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱ \text{ راس در } V_{\frac{m}{۲}} \\ -۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

به وضوح g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است. چون به ازای هر v در V_i ($i > \frac{m}{۲}$)، $g(v) \geq ۱$، درنتیجه $\gamma_{maj}(G) \leq g(V)$.

حال فرض کنید g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی V باشد به طوری که $g(V) = \gamma_{maj}(G)$. در این‌صورت v ای در V_i ای وجود دارد که $g(N[v]) \geq ۱$. بنابراین

$$\gamma_{maj}(G) = g(V) = g(N[v]) + g(V_i - v) \geq ۱ - (n - ۱) = ۲ - n \qquad (۴)$$

توجه کنید که از زوج بودن m استفاده‌ای نکرده‌ایم، لذا این نامساوی در همه‌ی حالت‌ها برقرار است.

اگر n فرد باشد $g(V) \geq ۳ - n$. بنابراین نتیجه برای m های زوج درست است.

حال فرض کنید m فرد است. تابع g را روی $V(G)$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(v) = \begin{cases} ۱ & \text{برای همه‌ی راس‌های } V_۱ \cup ... \cup V_{\frac{m-۱}{۲}} \\ ۱ & \text{برای تنها یک راس در هر یک از } V_{\frac{m+۱}{۲}} \text{ و } V_{\frac{m+۱}{۲}+۱} \\ -۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

چون برای هر v در V_i ($i \geq \frac{m+1}{2}$) داریم $g(v) \geq 1$، به وضوح g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار است لذا $\gamma_{maj}(G) \geq g(V) = 4 - n$.

در نهایت، نشان می‌دهیم وقتی m فرد است، $\gamma_{maj}(G) \geq 4 - n$. بنابر (۴)، $\gamma_{maj}(G) \geq 2 - n$. فرض کنید g یک $\gamma_{maj}(G)$ — تابع باشد. فرض کنید α_i تعداد راس‌های v در V_i را نشان دهد که $g(v) = 1$. با تعویض اندیس کلاس‌ها، در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m \geq 0$. فرض کنید به ازای هر i، $\alpha_i \in \{0, n\}$ است. در این‌صورت عدد صحیحی چون k وجود دارد که $g(V) = kn$. از این‌که g یک $\gamma_{maj}(G)$ — تابع است واضح است که $k \geq 1$. در این حالت، $g(V) = kn \geq 4 - n$ و نتیجه برقرار خواهد بود. هرگاه حداقل j ای وجود داشته باشد که $0 < \alpha_j < n$. فرض کنید i بزرگ‌ترین چنین j هایی باشد. در این‌صورت $i \geq \frac{m+1}{2}$. اگر چنین نباشد، برای هر $v \in V$، $g(N[v]) \leq 0$. این تناقض با آن است که g تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار است. هم چنین توجه کنید $v \in V_j$ وجود دارد که $j \leq i$ و $g(N[v]) \geq 1$. در این صورت، $g(V) = g(N[v]) + g(V_j - v) \geq 1 + 2\alpha_j - n - 1 \geq 2\alpha_j - n$. هم چنین، $g(V) = g(V - V_i) + g(V_i) = g(V - V_i) + 2\alpha_i - n$. پس اگر $\alpha_i > 1$ یا $g(V - V_i) > 0$، نامساوی $g(V) \geq 4 - n$ برقرار است. پس فرض کنید که $\alpha_i = 1$ و $g(V - V_i) = 0$. در این حالت، $g(N[v]) \geq 1$ اگر و تنها اگر $v \in V_j$ با $j > i$ یا $v \in V_j$ با $j \leq i$، $\alpha_j = 1$ و $g(v) = 1$. می‌توانیم ماکزیمم تعداد راس‌هایی چون v که $g(N[v]) \geq 1$ را بر حسب i محاسبه کنیم. بر حسب i اگر $s = (m-i)n + \frac{2i-m+1}{2}$ آن‌گاه چون $i \geq \frac{m+1}{2}$، لذا برای $n \geq 3$، $s \leq \frac{mn-n+2}{2} < \frac{mn}{2}$. این تناقض با تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار بودن g است. ■

قضیه ۵.۱.۲ برای هر عدد صحیح مثبت m، $\gamma_{maj}(K_{2(m)}) = 0$.

برهان. ابتدا فرض کنید $G = K_{2(m)}$. از قسمت اول برهان قضیه‌ی قبل وقتی m زوج و $n = 2$ باشد $\gamma_{maj}(G) = 2 - n = 0$. در ادامه فرض کنید m فرد است و $n = 2$. گیرید g یک $\gamma_{maj}(G)$ — تابع باشد. فرض کنید $v \in V$ و $g(N[v]) \geq 1$. اگر عضو دیگر این بخش از گراف را با u

نشان دهیم، داریم که $g(V) = g(N[v]) + g(u) \geq ۱ - ۱ = ۰$. بنابراین $\gamma_{maj}(G) \geq ۰$.
تابع g را به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(v) = \begin{cases} +۱ & \text{دقیقا برای یک راس از هر بخش} \\ -۱ & \text{برای بقیه راس‌ها} \end{cases}.$$

واضح است که g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی V بوده و لذا $\gamma_{maj}(G) \leq g(V) = ۰$. ■

قضیه ۲.۱.۶ فرض کنید $۱ \leq m < n$. اگر G یک گراف از مرتبه‌ی m و $H = K_n \cup G$، آن‌گاه

$$\gamma_{maj}(H) = \begin{cases} ۱ - m & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۲ - m & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}. \qquad (۵)$$

برهان. V_n را مجموعه‌ی راس‌های K_n و V_m را مجموعه‌ی راس‌های G در نظر بگیرید داریم که $V(H) = V_n \cup V_m$. فرض کنید g یک $\gamma_{maj}(G)$ — تابع باشد. راس $v \in V_n$ وجود دارد که $g(N[v]) \geq ۱$. در این صورت

$$\gamma_{maj}(K_n \cup G) = g(V) = g(N[v]) + g(V_m) \geq ۱ - m$$

لذا از بحث زوجیت، $\gamma_{maj}(H)$ حداقل از طرف راست رابطه‌ی (۵) نابیشتر است.
حال تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار g را روی H به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(v) = \begin{cases} ۱ & \text{برای } \lceil \frac{n+۱}{۲} \rceil \text{ راس } v \text{ در } V_n \\ -۱ & \text{برای بقیه راس‌ها} \end{cases}.$$

به وضوح g یک $SMDF$ از G است و $g(V)$ برابر طرف راست رابطه‌ی (۵) می‌باشد و این نشان می‌دهد که $\gamma_{maj}(H)$ نابیشتر از طرف راست رابطه‌ی (۵) است لذا برهان کامل است. ■

نتیجه ۲.۱.۳ برای $۱ \leq m \leq n$،

$$\gamma_{maj}(K_m \cup K_n) = \begin{cases} ۱ - m & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۲ - m & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

برهان. با فرض $G = K_m$ حکم از قضیه‌ی ۶.۱.۲ برقرار است. ■

نتیجه ۴.۱.۲ برای اعداد صحیح $1 \leq n_m \leq \cdots \leq n_2 \leq n_1$ $(m \geq 2)$ که در آن $n_1 > n_2 + \cdots + n_m$،

$$\gamma_{maj}(\bigcup_{i=1}^{m} K_{n_i}) = \begin{cases} 1 - (n_2 + \cdots + n_m) & \text{اگر } n_1 \text{ فرد باشد} \\ 2 - (n_2 + \cdots + n_m) & \text{اگر } n_1 \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

برهان. با فرض $G = \bigcup_{i=2}^{m} K_{n_i}$، حکم از قضیه‌ی ۶.۱.۲ حاصل می‌شود. ■

نتیجه ۵.۱.۲ برای اعداد صحیح $n > m \geq 1$،

$$\gamma_{maj}(K_m^c \cup K_n) = \begin{cases} 1 - m & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ 2 - m & \text{اگر } n \text{ زوج} \end{cases}.$$

برهان. با فرض $G = K_m^c$، حکم مستقیما از قضیه‌ی ۶.۱.۲ نتیجه می‌شود. ■

قضیه ۷.۱.۲ برای اعداد صحیح $m > n \geq 2$،

$$\gamma_{maj}(K_m^c \cup K_n) = \begin{cases} 1 - n & \text{اگر } m \text{ و } n \text{ هر دو فرد} \\ 2 - n & \text{اگر } m \text{ زوج} \\ 3 - n & \text{اگر } n \text{ زوج و } m \text{ فرد} \end{cases}. \quad (6)$$

برهان. فرض کنید G، V، V_n و V_m همانند برهان قضیه‌ی ۶.۱.۲ تعریف شده باشند. تابع g را روی V به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(v) = \begin{cases} ۱ & \text{برای } \lceil \frac{n+۱}{۲} \rceil \text{ راس } v \text{ در } V_n \\ ۱ & \text{برای } \lceil \frac{m-n}{۲} \rceil \text{ راس } v \text{ در } V_m \\ -۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

به راحتی دیده می‌شود که g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است. لذا

$$\gamma_{maj}(G) \leq g(V) = \begin{cases} ۱ - n & \text{اگر } m \text{ و } n \text{ فرد} \\ ۲ - n & \text{اگر } m \text{ زوج} \\ ۳ - n & \text{اگر } n \text{ زوج و } m \text{ فرد} \end{cases}.$$

حال فرض کنید g یک $\gamma_{maj}(G)$ – تابع باشد. هرگاه راس v ای در V_n وجود داشته باشد که $g(N[v]) \geq ۱$، حداقل $\lceil \frac{m+n}{۲} \rceil - n$ راس v در V_m وجود دارند که $g(v) = ۱$. لذا خواهیم داشت

$$\gamma_{maj}(G) = g(V) \geq \begin{cases} ۱ - m + ۲\lceil \frac{m-n}{۲} \rceil & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ ۲ - m + ۲\lceil \frac{m-n}{۲} \rceil & \text{اگر } n \text{ زوج} \end{cases}.$$

با استفاده از زوج یا فرد بودن m، واضح است که $g(V)$ از طرف راست رابطه‌ی (۶) ناکمتر است. درنهایت، اگر هیچ v ای در V_n نباشد که $g(N[v]) \geq ۱$، آن‌گاه باید $\lceil \frac{m+n}{۲} \rceil$ راس v در V_m موجود باشند که $g(v) = ۱$. بنابراین

$$\begin{aligned} g(V) = g(V_m) + g(V_n) &\geq \lceil \tfrac{m+n}{۲} \rceil - (m - \lceil \tfrac{m+n}{۲} \rceil) - n \\ &\geq ۲\lceil \tfrac{m+n}{۲} \rceil - m - n, \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $g(V)$ ناکمتر از طرف راست رابطه‌ی (۶) است.

■

قضیه ۸.۱.۲ برای اعداد صحیح $m > ۲$ و $n \geq ۲$،

$$\gamma_{maj}(\bigcup_{i=۱}^{m} K_n) = \begin{cases} \lceil \frac{m}{۲} \rceil - n\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ ۲\lceil \frac{m}{۲} \rceil - n\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor & \text{اگر } n \text{ زوج} \end{cases}. \qquad (۷)$$

برهان. فرض کنید $G = \bigcup_{i=1}^{m} K_n$ و V_i مجموعه‌ی راس‌های i امین کپی K_n باشد.
تابع g روی V را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$g(v) = \begin{cases} 1 & \text{برای } \lceil \frac{n+1}{2} \rceil \text{ راس } v \text{ در } V_i \text{ برای } i \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil \\ -1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

به وضوح g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است و نشان می‌دهد که $\gamma_{maj}(G)$ نابیشتر از طرف راست رابطه‌ی (۷) است. فرض کنید g یک $\gamma_{maj}(G)$ — تابع باشد. توجه کنید برای هر v در V_i، $g(V_i) = g(N[v])$. چون $g(V) = \gamma_{maj}(G)$، هرگاه $g(v) = 1$، پس بنابه لم ۲.۱.۲ u ای در $N[v]$ وجود دارد که $g(N[u])$ برابر ۱ یا ۲ است. توجه کنید که در این حالت $g(N[u]) = g(N[v])$.
بنابراین $g(V_i) \in \{-n, 1, 2\}$. چون g یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار است حداقل $\lceil \frac{mn}{2} \rceil$ راس از کل راس‌ها توسط g پوشانده می‌شود. این نتیجه می‌دهد $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ از زیرگراف‌های کامل، باید وزن مثبت و بقیه‌ی $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ زیرگراف کامل، وزن منفی داشته باشند لذا $\gamma_{maj}(G)$ ناکمتر از طرف راست رابطه‌ی (۷) است. ■

نتیجه ۶.۱.۲ برای هر دو عدد صحیح $r \geq 2$ و $n > 0$، یک گراف r — منتظم چون G وجود دارد که $\gamma_{maj}(G) \leq -n$.

برهان. فرض کنید $G = \bigcup_{i=1}^{2n} K_{r+1}$. در این‌صورت با استفاده از قضیه‌ی ۸.۱.۲ داریم

$$\gamma_{maj}(\bigcup_{i=1}^{2n} K_{r+1}) = \begin{cases} \lceil \frac{2n}{2} \rceil - (r+1)\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor \leq n - 3n \leq -n & \text{اگر } r \text{ زوج} \\ 2\lceil \frac{2n}{2} \rceil - (r+1)\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor \leq 2n - 4n \leq -n & \text{اگر } r \text{ فرد} \end{cases}.$$

■

برای عدد صحیح m، فرض کنید $P(m, \gamma_{maj})$ کوچکترین مرتبه برای یک گراف همبند باشد که عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار آن برابر m است.

قضیه ۹.۱.۲ برای عدد صحیح $m \geq ۰$، $P(-m, \gamma_{maj}) = m + ۴$.

برهان. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف همبند با $\gamma_{maj}(G) = -m$ بوده و g یک $\gamma_{maj}(G)$ − تابع باشد. چون $-m = g(V) = |P| - |M|$، خواهیم داشت $|M| = |P| + m$. واضح است که $|P| \geq ۲$، در غیر این‌صورت برای هر v از V، $g(N[v]) \leq ۰$، که با تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار بودن g روی G در تناقض است. بنابراین $|V| = |P| + |M| = ۲|P| + m \geq m + ۴$.
چون G یک گراف همبند دلخواه با $\gamma_{maj}(G) = -m$ است، نتیجه می‌شود که $P(-m, \gamma_{maj}) \geq m + ۴$. با این وجود از نتیجه‌ی ۱.۱.۲ داریم، $K_{۲,m+۲}$ یک گراف همبند از مرتبه‌ی $m + ۴$ است که $\gamma_{maj}(K_{۲,m+۲}) = -m$، لذا $P(-m, \gamma_{maj}) \leq m + ۴$. بنابراین $P(-m, \gamma_{maj}) = m + ۴$. ■

۲.۲ کران‌هایی برای عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار

چون هر تابع احاطه‌گر علامت‌دار روی G، یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار روی G است، لذا قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱.۲.۲ برای هر گراف G، $\gamma_{maj}(G) \leq \gamma_s(G)$.

قضیه‌ی زیر یک کران پایین برای عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار یک گراف r − منتظم ارایه می‌دهد.

قضیه ۲.۲.۲ برای هر گراف r − منتظم G با n راس داریم

$$\gamma_{maj}(G) \geq -(\frac{n}{۲}) \cdot (\frac{r}{r + ۱}).$$

برهان. فرض کنید G یک گراف $r-$ منتظم بوده و g یک $\gamma_{maj}(G)-$ تابع باشد. گیرید C مجموعه‌ی راس‌هایی از G باشد که توسط g پوشانده می‌شوند. در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned}\sum_{v\in C} g(N[v]) + \sum_{v\in(V-C)} g(N[v]) &= \sum_{v\in V} g(N[v])\\ &= \sum_{v\in V}\sum_{u\in N[v]} g(u)\\ &= (r+1)\gamma_{maj}(G).\end{aligned}$$

برای هر $v\in C$، $g(N[v])\geq 1$ و برای هر $v\in(V-C)$، $g(N[v])\geq -(r+1)$. لذا مجموع $\sum_{v\in C} g(N[v]) + \sum_{v\in(V-C)} g(N[v])$ در رابطه‌ی بالا حداقل $|C|-|V-C|(r+1)$ است که در آن $|C|\geq \frac{n}{2}$ و $-|V-C|\geq -\frac{n}{2}$. بنابراین، مجموع فوق حداقل برابر است با $\frac{n}{2}-\frac{n}{2}(r+1)=-\frac{n}{2}r$، در نتیجه $(r+1)\gamma_{maj}(G)\geq -\frac{n}{2}r$. ■

قضیه ۳.۲.۲ برای هر گراف همبند G،

$$\gamma_{maj}(G)\leq\begin{cases}1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\\ 2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\end{cases}.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه‌ی n باشد. ابتدا فرض کنید $n=2k+1$. V را به دو مجموعه‌ی V_1 و V_2 به‌ترتیب با کاردینال k و $k+1$ افراز می‌کنیم به طوری که تعداد یال‌های بین زیرگراف‌های القا شده‌ی $G[V_1]$ و $G[V_2]$ کمترین مقدار ممکن باشد. بنابراین به ازای هر $v\in V_2$، $|N_{V_1}(v)|\leq |N_{V_2}(v)|$، زیرا در غیر این‌صورت با حذف v از V_2 و افزودن آن به V_1 یک افراز جدید حاصل می‌شود که تعداد یال‌های بین زیرگراف‌های القا شده توسط افراز جدید کمتر از افراز اولیه است. حال اگر به همه‌ی راس‌های V_2، $+1$ و به همه‌ی راس‌های V_1، -1 نسبت دهیم، یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار با وزن ۱ روی G خواهیم داشت. بنابراین اگر G از مرتبه فرد باشد آن‌گاه $\gamma_{maj}(G)\leq 1$. حال فرض کنید $n=2k$ و v یک راس دلخواهی در G باشد. در این‌صورت گراف

$G - v$ از مرتبه‌ی فرد است. بنابر حالت قبل، یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار با وزن ۱ روی $G - v$ موجود است. حال با دادن مقدار ۱+ به v، تابع فوق را به یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار با وزن ۲ برای G گسترش می‌دهیم. بنابراین اگر G از مرتبه زوج باشد، آن‌گاه $\gamma_{maj}(G) \leq 2$. ■

فصل ۳

احاطه‌ی اکثریت اکید علامت‌دار

مقدمه

تابع $f : V(G) \to \{-۱, ۱\}$ را یک **تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار** ($SSMDF$) برای G گوییم هرگاه برای بیش از نصف راس‌های v از G، $f(N(v)) \geq ۱$. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار مینیمال** یا $\gamma^s_{maj}(G)$ $-$ **تابع** نامیده می‌شوند. وزن تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار مینیمال را **عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار** نامیده و با $\gamma^s_{maj}(G)$ نشان می‌دهند. برای هر تابع $SSMDF$ از G چون f مجموعه‌های P_f، M_f، C_f، P^+_f، P^-_f، M^+_f و M^-_f را همانند فصل قبل تعریف می‌کنیم.

۱.۳ عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار برای خانواده‌ی گراف‌های خاص

گزاره‌ی زیر دقیقا با برهان گزاره‌ی ۳.۱.۲ اثبات می‌شود.

گزاره ۱.۱.۳

$$\gamma^s_{maj}(K_n) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۲ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

قضیه ۱.۱.۳ [۸] برای $n = ۴$ و $n = ٦$، $\gamma^s_{maj}(C_n \square K_۲) = ۴$.

قضیه ۲.۱.۳ برای هر عدد صحیح مثبت m، $\gamma^s_{maj}(۲K_{۲m}) = ۴$.

برهان. برای آن‌که تابعی چون f یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار روی گرافی باشد که از اجتماع مجزای دو گراف کامل مشابه هم تشکیل شده است، باید در هر مولفه‌ای حداقل یک راس چون v داشته باشیم که $f(N[v]) \geq ۱$. لذا هر مولفه از این گراف دارای وزن مثبت است. چون مرتبه‌ی هر مولفه زوج است لذا هر مولفه دارای وزن حداقل ۲ است. از این‌رو $\gamma^s_{maj}(۲K_{۲m}) = ۴$. ■

تذکر ۱.۱.۳ اضافه کردن مولفه‌ی بیشتر سبب افزایش عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار نخواهد شد. اگر به عنوان مثال سه گراف کامل داشته باشیم، فقط کافی است که در دو تا از مولفه‌ها برای هر راس، وزن همسایگی بسته‌ی آن ناکمتر از یک باشد. لذا $\gamma^s_{maj}(۳K_{۲m}) = ۴ - ۲m$. به ویژه عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار برای $m \geq ۳$ منفی است.

برای اینکه تابعی روی $K_{۱,n}$ یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار باشد لازم است که به راس اتکا و حداقل برای نصف برگ‌ها مقدار ۱+ و برای سایر راس‌ها مقدار ۱− نسبت دهیم، لذا قضیه‌ی زیر ثابت شده است.

قضیه ۳.۱.۳ برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$ داریم

$$\gamma^s_{maj}(K_{۱,n-۱}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۲ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

قضیه ۴.۱.۳ برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، $\gamma^s_{maj}(K_{n,n}) = ۲$.

برهان. فرض کنید f یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار روی $K_{n,n}$ باشد. هر بخش باید راسی چون v داشته باشد که $f(N[v]) \geq ۱$. بنابراین وقتی n فرد باشد برای داشتن تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار کافی است هر بخش حداقل $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ راس با مقدار $+۱$ داشته باشد، لذا وقتی n فرد است $\gamma^s_{maj}(K_{n,n}) = ۲(\lceil \frac{n}{۲} \rceil - \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor) = ۲$. فرض کنید n زوج باشد. در این‌صورت باید حداقل یکی از دو بخش دارای بیش از $\frac{n}{۲}$ راس با مقدار $+۱$ باشد. بنابر استدلال بالا $\gamma^s_{maj}(K_{n,n}) \geq ۲$. تابع g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(v) = \begin{cases} +۱ & \text{برای } \frac{n}{۲} \text{ راس در یک بخش و } \frac{n}{۲}+۱ \text{ راس در بخش دیگر} \\ -۱ & \text{برای بقیه‌ی راس‌ها} \end{cases}.$$

به‌وضوح g یک $SSMDF$ روی $K_{n,n}$ است و لذا $\gamma^s_{maj}(K_{n,n}) \leq ۲$ درنتیجه $\gamma^s_{maj}(K_{n,n}) = ۲$. ■

از نتیجه‌ی ۱.۱.۲ و قضیه‌ی ۴.۱.۳ ملاحظه می‌شود که اختلاف بین عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار و عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار به اندازه‌ی دلخواه می‌تواند بزرگ باشد. در واقع نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۱.۱.۳ برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$ داریم

$$\gamma^s_{maj}(K_{n,n}) - \gamma_{maj}(K_{n,n}) = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ n-۱ & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}.$$

گزاره ۲.۱.۳ برای اعداد صحیح $n > m \geq 2$ داریم

$$\gamma^s_{maj}(K_{m,n}) = \begin{cases} 2 - n & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ 3 - n & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

برهان. تابع g را روی $V(K_{m,n})$ با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید:

$$g(v) = \begin{cases} +1 & \text{برای } \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1 \text{ راس در بخش } m \text{ راسی} \\ -1 & \text{برای بقیه‌ی راس‌ها} \end{cases}.$$

به‌وضوح g یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار با وزن $\lceil \frac{m}{2} \rceil - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 - n$ است لذا $\gamma^s_{maj}(K_{m,n}) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 - n$. چون هر تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار، یک تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار است، نتیجه‌ی ۱.۱.۲ ایجاب می‌کند $\gamma_{maj}(K_{m,n}) \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 - n$. بنابراین $\gamma^s_{maj}(K_{m,n}) \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 - n$، در نتیجه $\gamma^s_{maj}(K_{m,n}) = \lceil \frac{m}{2} \rceil - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 - n$. ■

۲.۳ کران‌های بالا برای عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار

قضیه ۱.۲.۳ اگر G گرافی از مرتبه‌ی فرد باشد، $\gamma^s_{maj}(G) \geq 1$.

برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی $n = 2k + 1$ باشد. V را به دو مجموعه‌ی V_1 و V_2 با $|V_1| = k$ و $|V_2| = k + 1$ افراز کنید به طوری که تعداد یال‌های بین $G[V_1]$ و $G[V_2]$ مینیمم باشد. به ازای هر $v \in V_2$ داریم که $|N_{V_2}(v)| \leq |N_{v_1}(v)|$. در غیر این‌صورت با حذف v از V_2 و افزودن آن به V_1، افراز دیگری چون V'_1 و V'_2 برای V به دست می‌آید که تعداد یال‌های بین $G[V'_1]$ و $G[V'_2]$ کمتر از تعداد این یال‌ها برای افراز V_1 و V_2 می‌باشد و این یک تناقض است. حال هرگاه به راس‌های V_2

مقدار $+۱$ و به راس‌های $V_۱$ مقدار -۱ نسبت دهیم یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار با وزن ۱ خواهیم داشت. بنابراین $\gamma^s_{maj}(G) \leq ۱$. ■

تعریف: فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی از مرتبه‌ی $n = ۲k$ باشد و گیرید $W_۱$ و $W_۲$ افرازی از V باشند به‌طوری که $|W_۱| = |W_۲| = k$. چنین افرازی را به دلیل تساوی در تعداد اعضا یک **افراز هم‌سان** می‌نامند. تابع h را به‌صورت زیر تعریف کنید: برای $v \in W_i$ ($i = ۱, ۲$)، $h(v) = |N(v) \cap W_i| - |N(v) \cap W_{۳-i}|$. افراز هم‌سانی را که برای هر $v \in V$، $h(v) > ۰$، یک **افراز هم‌سان قوی** می‌نامند.

لم ۱.۲.۳ اگر G گرافی از مرتبه‌ی زوج باشد که افراز هم‌سان قوی ندارد آن‌گاه $\gamma^s_{maj}(G) \leq ۲$.

برهان. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ یک افراز هم‌سان برای $V(G)$ باشد به‌طوری‌که یال‌های بین $G[W_۱]$ و $G[W_۲]$ کمترین تعداد ممکن است. با این انتخاب، برای هر $u \in W_۱$ و $v \in W_۲$، $h(u) + h(v) \geq ۰$، زیرا در غیر این‌صورت با عوض کردن جای u و v به یک افراز مناسب‌تری دست می‌یابیم. چون $W_۱$ و $W_۲$ یک افراز هم‌سان قوی نیست، u ای در یکی از W_i ها وجود دارد که $h(u) \leq ۰$. بنابراین برای هر $v \in W_{۳-i}$، $h(v) \geq ۰$. با نسبت دادن مقدار $+۱$ به u و همه‌ی راس‌های $W_{۳-i}$ و -۱ برای بقیه‌ی راس‌ها، یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار با وزن ۲ خواهیم داشت و برهان تمام است. ■

قضیه ۲.۲.۳ برای هر گراف G، $\gamma^s_{maj}(G) \leq ۴$.

برهان. از قضیه‌ی ۱.۲.۳ و لم ۱.۲.۳، می‌توانیم فرض کنیم که G از مرتبه‌ی زوج $n = ۲k$ بوده و افراز هم‌سان قوی چون $W_۱$ و $W_۲$ دارد. روی همه‌ی راس‌های G، w ای را که $h(w) = min\{h(v) | v \in V(G)\}$ است انتخاب کنید. می‌توانیم فرض کنیم $w \in W_۲$. فرض کنید

$l = \lfloor \frac{h(w)-1}{2} \rfloor$. به‌وضوح $l \geq 0$. چون $h(w) \geq 2l+1$ و $|W_1| = |W_2|$، مجموعه‌ی S ای با l راس در W_1 وجود دارد که با w مجاور نیستند. فرض کنید T یک مجموعه با $l+1$ راس مجاور w در W_2 باشد.

تابع g را به‌صورت زیر تعریف کنید:

به ازای هر $v \in (W_1 - S) \cup T \cup \{w\}$، $g(v) = +1$ و برای هر $v \in S \cup (W_2 - T - \{w\})$، $g(v) = -1$.

داریم $w(g) = 4$. ادعا می‌کنیم که g یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار روی G است که برای هر $v \in W_1 \cup \{w\}$، $g(N[v]) \geq 1$. چون برای هر راس v از W_1، $h(v) \geq 2l+1$، لذا $g(N[v]) \geq 1$. چون $h(w) \leq 2l+2$ در نتیجه $g(N[w]) \geq 1$. ■

قضایای ۳.۱.۱ و ۳.۱.۲ نشان می‌دهد کران بالای قضیه‌ی ۳.۲.۲ برای گراف‌های همبند و ناهمبند دقیق است.

۳.۳ عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار برای درخت‌ها

لم ۳.۳.۱ فرض کنید T درختی با مرتبه‌ی $2k$ باشد و تعداد راس‌هایی از T که دقیقا یک راس مجاور غیربرگ دارند، کمتر از ۳ باشد، $\gamma^s_{maj}(T) \leq 2$.

برهان. فرض کنید R مجموعه‌ی متشکل از راس‌هایی از T باشد که دقیقا یک راس مجاور غیربرگ دارند. گیرید T' درخت حاصل از حذف برگ‌های T باشد. در این‌صورت اعضای R برگ‌های درخت T' هستند. بنابراین $|R| \leq 2$ اگر و فقط اگر T' یک مسیر باشد و این اگر و فقط اگر T یک کاترپیلار باشد. هرگاه T' تک راس باشد، T یک ستاره است و نتیجه بنابر قضیه‌ی ۳.۱.۳ برقرار است. پس فرض می‌کنیم T' یک مسیر به طول حداقل یک است. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: T راسی چون v دارد که هر مولفه از $T - v$ کمتر از k راس دارد. حذف v و برگ‌های آن جنگلی با حداکثر ۲ مولفه پدید می‌آورد (اگر v یک برگ از T' باشد فقط یک مولفه است). فرض

کنید این مولفه‌ها T_1 و T_2 به ترتیب دارای n_1 و n_2 راس باشند که $0 \leq n_1 \leq n_2 < k$. نگاشت g را به‌صورت زیر تعریف کنید:

برای هر $u \in V(T_1)$ و برای $|V(T_1)| - 1 + k$ راس $u \in N[v] - (V(T_1) \cup V(T_2))$، $g(u) = +1$ و برای سایر راس‌های x، $g(x) = -1$. به آسانی می‌توان دید که g یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار با وزن ۲ است که به $k + 1$ تا از راس‌ها مقدار $+1$ را نسبت می‌دهد. چون $d(v) = 2k - n_1 - n_2 + 1$ و g به $k - n_1 + 1$ راس در $N[v]$، مقدار $+1$ نسبت داده است، لذا $g(N[v]) \geq 1$. راس‌هایی چون x که $g(x) = +1$، با راس‌هایی مجاور هستند که مقدار $+1$ دارند.

حالت ۲: T یالی چون xy دارد که $T - xy$ از دو مولفه، هر یک k راس دارند. فرض کنید T_x و T_y مولفه‌های $T - xy$، به ترتیب شامل راس‌های x و y باشند. فرض کنید l و m به ترتیب، تعداد برگ‌های مجاور با x و y باشد. می‌توانیم فرض کنیم $l \geq m \geq 0$.

حال گیرید به راس‌های x و y، هم چنین $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ از برگ‌های مجاور y و همه‌ی راس‌های T_x به جز $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ از برگ‌های مجاور x، $+1$ و به بقیه‌ی راس‌ها -1 نسبت دهیم. حاصل یک $SSMDF$ برای G است.

برای گراف ستاره‌ی مضاعف ($T' = k_2$) با $l = m = k - 1$ داریم $g(N[x]) = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - \lceil \frac{k-1}{2} \rceil + 1$ است. ■

لم ۲.۳.۳ فرض کنید T درختی از مرتبه‌ی $2k$ باشد. اگر T راسی از درجه‌ی ۲ داشته باشد که دقیقا یک همسایه‌ی غیربرگ دارد آن‌گاه $\gamma^s_{maj}(T) \leq 2$.

برهان. گیرید R همان مجموعه‌ی تولید شده در برهان لم ۱.۳.۳ باشد. فرض کنید $y \in R$ از درجه‌ی ۲، z برگ مجاور با y بوده و $x \in N(y) - \{z\}$ (توجه کنید که چون T از مرتبه‌ی زوج است، x نمی‌تواند برگ باشد). از لم ۱.۲.۳، می‌توانیم فرض کنیم که T یک افراز هم‌سان قوی W_1 و W_2 دارد. چون $h(y) > 0$، می‌توانیم فرض کنیم $x, y, z \in W_2$. چون T یک درخت است، زیرگراف تولید شده توسط W_1 یک جنگل است و به ازای هر $v \in W_1$، $h(v) > 0$. W_1 حداقل شامل یک برگ چون p است. چون $h(p) > 0$، p یک برگ از T است که با راس $q \in W_1$ مجاور است.

حال یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار g را با وزن ۲ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای حالتی که $h(q) \leq ۲$، برای هر راس $v \in (W_۲ - z) \cup \{p,q\}$، $g(v) = +۱$ و به بقیه راس‌ها g مقدار -۱ نسبت دهد. اگر $h(q) > ۲$، برای هر راس $v \in (W_۱ - \{p\}) \cup \{y,z\}$، $g(v) = +۱$ و به بقیه راس‌ها g مقدار -۱ نسبت می‌دهد. در این صورت، تمام راس‌هایی که g، مقدار $+۱$ به آن‌ها نسبت داده است، توسط g پوشانده می‌شوند. ■

لم ۳.۳.۳ فرض کنید T درختی با مرتبه‌ی $۲k$ باشد. اگر T دارای یک افراز هم‌سان قوی باشد به‌طوری‌که در هر بخش از افراز راسی موجود باشد که دقیقا با یک راس غیربرگ مجاورند آن‌گاه $\gamma^s_{maj}(T) \leq ۲$.

برهان. فرض کنید $W_۱$ و $W_۲$ چنین افراز هم‌سان قوی از T باشد و R را همانند دو لم قبل تعریف کنید. گیرید $R_i = R \cap W_i \ (i = ۱,۲)$. برای هر $v \in R$، فرض کنید v^* راس غیر برگ مجاور v باشد. برای $i = ۱,۲$ و $v \in R$، فرض کنید

$$d^*(v) = \begin{cases} d(v) & \text{اگر } v \in R_i \text{ و } v^* \in W_i \\ d(v) - ۲ & \text{اگر } v \in R_i \text{ و } v^* \in W_{۳-i} \end{cases}.$$

چون افراز فوق یک هم‌سان قوی است، هر برگ در همان مجموعه‌ی W_i ای است که راس مجاورش در آن است. راس $v \in R_i$ را در نظر بگیرید. هرگاه $\lceil \frac{d^*(v)}{۲} \rceil \leq \sum_{w \in R_{۳-i}} \lfloor \frac{d^*(w)}{۲} \rfloor$، فرض کنید S مجموعه‌ی متشکل از برگ‌های مجاور با راس‌های $R_{۳-i}$ با $\lfloor \frac{d^*(v)}{۲} \rfloor$ عضو باشد که برای هر راس $w \in R_{۳-i}$ حداکثر از $\lfloor \frac{d^*(w)}{۲} \rfloor$ برگ مجاور w تشکیل شده است. نگاشت g با وزن ۲ را به‌صورت زیر روی T تعریف کنید: $g(v) = +۱$، برای $\lceil \frac{d^*(v)}{۲} \rceil$ برگ مجاور با v چون u، $g(u) = +۱$، برای هر $u \in W_{۳-i} - S$، $g(u) = +۱$ و برای سایر راس‌های T، g مقدار -۱ نسبت دهد. چون $g(v) = +۱$، $g(N[v]) \geq ۱$ و $|\{u \in W_{۳-i} : g(u) = -۱\}| = |\{u \in L(W_i) : g(u) = +۱, g(N[u]) \geq ۱\}|$ ، که در آن $L(W_i)$ مجموعه‌ی برگ‌های W_i است به‌وضوح g تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار روی T است. البته تمام اعضای مجموعه‌ی سمت راست در بالا برگ هستند. اگر

$\lfloor\frac{d*(w)}{2}\rfloor \leq \sum_{w\in R_{3-i}}\lceil\frac{d*(v)}{2}\rceil$ آن‌گاه واضح است که $\gamma^s_{maj}(T) \leq 2$.

حال گیرید برای $i = 1, 2$، و $v \in R_i$، $\lceil\frac{d*(v)}{2}\rceil > \sum_{w\in R_{3-i}}\lfloor\frac{d*(w)}{2}\rfloor$.

اینک راس‌های $v \in R_i$ و $w \in R_{3-i}$ را چنان در نظر بگیرید که $d^*(w) \geq d^*(v)$. بنابه فرض $\lfloor\frac{d*(v)}{2}\rfloor \geq \lfloor\frac{d*(w)}{2}\rfloor > \lceil\frac{d*(v)}{2}\rceil$، لذا $d^*(v)$ فرد است و $d^*(w) = d^*(v)$. این نتیجه می‌دهد که به ازای هر $v \in R_i$ و هر $w \in R_{3-i}$، $d^*(v) = d^*(w)$. این ایجاب می‌کند که برای هر $v, w \in R$، $d^*(v) = d^*(w)$. اگر این مقدار از یک تجاوز کند، از فرض نتیجه می‌شود که برای هر i، $|R_i| = 1$ و هم‌چنین T دقیقا دو راس در R دارد، در این حالت از لم ۱.۳.۳، $\gamma^s_{maj}(T) \leq 2$، لذا می‌توان فرض کرد که برای هر راس $v \in R$ در T، $d^*(v) = 1$، در غیر این‌صورت $\gamma^s_{maj}(T) \leq 2$.

از لم ۱.۳.۳، می‌توانیم بدون خلل به کلیت، سه راس $x \in R_1$ و $y, z \in R_2$ را انتخاب کنیم. چون برای هر $v \in R_1 \cup R_2$ داریم که $d^*(v) = 1$، هر یک از x, y, z از درجه‌ی ۳ هستند.

یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار با وزن ۲ را می‌توان با نسبت دادن مقدار $+1$ به مجموعه‌ی شامل y و z، یک همسایه‌ی برگ از هر یک از $\{y, z\}$، تمام راس‌های W_1 به جز x و دو همسایه‌ی برگ از x و نسبت دادن -1 به بقیه‌ی راس‌ها تعریف کرد. پس $\gamma^s_{maj}(T) \leq 2$. ■

قضیه ۱.۳.۳ برای هر درخت T، $\gamma^s_{maj}(T) \leq 2$.

برهان. R را مجموعه‌ی راس‌هایی از T در نظر بگیرید که دقیقا با یک راس غیربرگ مجاور هستند. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳، می‌توانیم فرض کنیم T دارای مرتبه‌ی زوج $2k$ است. بنابر لم‌های ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳، می‌توانیم فرض کنیم که T حداقل سه راس در R دارد که هیچ کدام از درجه‌ی ۲ نیستند. چون T مرتبه‌ی $2k$ دارد، می‌توانیم دو راس w_1 و w_2 را با کمترین درجه و اینکه $2 < d(w_i) < k$ ($1 \leq i \leq 2$) انتخاب کنیم. اگر T یک افراز هم‌سان قوی W_1 و W_2 داشته باشد که $w_i \in W_i$ ($1 \leq i \leq 2$)، آن‌گاه از لم ۳.۳.۳ حکم حاصل می‌شود لذا فرض می کنیم که T چنین افراز هم‌سانی ندارد. برای $i = 1, 2$، فرض کنید S_i از w_i و همسایه‌های برگ آن‌ها تشکیل شده باشد. چون $d(w_i) < k$، یک افراز هم‌سان وجود دارد که برای هر i، $S_i \subset W_i$. از بین تمام چنین افرازهایی، فرض

کنید W_1 و W_2 چنان باشد که تعداد یال‌های القایی مابین $G[W_1]$ و $G[W_2]$ کمترین مقدار باشد. در این‌صورت برای هر $u \in W_1 - S_1$ و $v \in W_2 - S_2$، $h(u) + h(v) \geq 0$ (در غیر این‌صورت u را به W_2 و v را به W_1 انتقال می‌دهیم تا افراز بهتری به دست آید).

چون W_1 و W_2 یک افراز هم‌سان قوی نیست، u ای در یکی از W_i ها وجود دارد که $h(u) \leq 0$. هم‌چنین توجه داریم که برای هر $v \in W_{3-i} - S_{3-i}$، $h(v) \geq 0$. هم‌چنین از روی ساختار، برای هر $w \in S_1 \cup S_2$، $h(w) > 0$.

نگاشت g با ضابطه‌ی $g(u) = +1$، برای هر راس $v \in W_{3-i}$، $g(v) = +1$ یک تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار با وزن ۲ روی T است. این برهان را تمام می‌کند. ■

فصل ۴

$k-$ زیراحاطه‌ی علامت‌دار

مقدمه

تابع $f : V(G) \to \{-۱, ۱\}$ را یک **تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار** ($SkSDF$) برای G گوییم هرگاه حداقل برای k تا از راس‌های G چون v داشته باشیم، $f(N[v]) \geq ۱$. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار مینیمال** یا **$\gamma_{ks}(G)-$ تابع** نامیده می‌شوند. وزن تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار مینیمال را **عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار** نامیده و با $\gamma_{ks}(G)$ نشان می‌دهند.

مجموعه‌ی P_f، M_f، C_f، P_f^+، P_f^-، M_f^+ و M_f^- را همانند فصول قبل تعریف کنید.

۱.۴ کران پایین برای عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار در درخت‌ها

فرض کنید $\gamma = min \quad \gamma_{ks}(T)$ که در آن مینیمم به ازای تمام درخت‌های T از مرتبه‌ی n و $n \geq k$ گرفته شده است و Ψ مجموعه‌ی درخت‌های T باشد که $\gamma_{ks}(T) = \gamma$. به‌علاوه، فرض کنید $\alpha(T)$ مجموع درجات راس‌هایی از T باشد که حداقل از درجه‌ی ۳ هستند. گیرید $\Gamma = \{T \in \Psi | \alpha(T)$ مینیمم است$\}$.

قضیه ۱.۱.۴ [۴] برای هر n، $\Gamma = \{P_n\}$.

فرض کنید $\digamma = \{f | w(f) = \gamma$ با P_n روی $SkSDF$ یک $f\}$.

قضیه ۲.۱.۴ فرض کنید $v_1, v_2, \ldots, v_n$ دنباله‌ی راس‌های P_n باشد. در این‌صورت $f^* \in \digamma$ چنان وجود دارد که $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq C_{f^*}$.

برهان. فرض کنید برای هر $f \in \digamma$، $s = min\{i | v_i \in P_f\}$ و $t = max\{i | v_i \in P_f\}$ و $f \in \digamma$ ای را انتخاب کنید که $r(f) = t - s$ مینیمم باشد. فرض کنید راس‌های C_f روی P_n متوالی نباشند. در این‌صورت i ای وجود دارد که $v_{i-1} \in C_f$ و $v_i \notin C_f$ و l ای وجود دارد که $l > i$ و $v_l \in C_f$. حال برای هر $v_j \in V(P_n)$ که $v_j \in C_f$، حداقل دو راس از $\{v_{j-1}, v_j, v_{j+1}\}$ در P_f هستند بنابراین $f(v_{i+1}) = -1$. فرض کنید $j = min\{l : l > i + 1, f(l) = 1\}$ و نگاشت $f' : V \to \{-1, 1\}$ را با ضابطه‌ی

$$(f'(v_1), f'(v_2), \ldots, f'(v_n)) = (f(v_1), \ldots, f(v_i), f(v_j), f(v_{j+1}), \ldots, f(v_t), -1, \ldots, -1)$$

تعریف کنید. در این‌صورت f' یک $SkSDF$ روی P_n با $w(f') = w(f) = \gamma$ و $r(f') < r(f)$ است و این با مینیمم بودن $r(f)$ متناقض است. لذا راس‌های C_f روی P_f متوالی هستند. اگر $v_1 \in C_f$، آن‌گاه $f^* = f$ در شرایط لازم صدق می‌کند. حال فرض کنید $c > 1$ و v_c اولین راسی از P_n است که توسط f پوشانده می‌شود. اگر $f(v_{c-1}) = -1$، نگاشت $f^* : V \to \{-1, 1\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید:

$$(f^*(v_1), f^*(v_2), \ldots, f^*(v_n)) = (f(v_c), f(v_{c+1}), \ldots, f(v_t), -1, \ldots, -1).$$

اگر $f(v_{c-1}) = ۱$ (که ایجاب می‌کند $f(v_c) = -۱$ و $f(v_{c+1}) = ۱$)، آن‌گاه نگاشت $f^* : V \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر

$$(f^*(v_۱), f^*(v_۲), \ldots, f^*(v_n)) = (۱, f(v_{c+1}), f(v_{c+۲}), \ldots, f(v_t), -۱, \ldots, -۱)$$

تعریف کنید. در هر حالت f^* یک $SkSDF$ با $w(f^*) = w(f) = \gamma$ است و $\{v_۱, \ldots, v_k\} \subseteq C_{f^*}$. ■

قضیه ۳.۱.۴ برای $n \geq ۲$ و هر $۱ \leq k \leq n$، $\gamma_{ks}(P_n) = ۲\lfloor \frac{۲k+۴}{۳} \rfloor - n$.

برهان. حالت $k = n$ در [۵] اثبات شده است، لذا فرض می‌کنیم $k < n$. از قضیه‌ی ۲.۱.۴، یک $SkSDF$ روی P_n مانند f وجود دارد که با کمترین $|P_f|$، $\{v_۱, \ldots, v_k\}$ را پوشش می‌دهد. f حداقل به دو راس از هر سه راس متوالی در $\{v_۱, \ldots, v_{k+1}\}$ مقدار $+۱$ می‌دهد و $f(v_۱) = f(v_۲) = ۱$. فرض کنید σ دنباله‌ی متناهی $۱, ۱, -۱, ۱, ۱, -۱, \ldots$ باشد. فرض کنید $(f(v_۱), f(v_۲), \ldots, f(v_n))$، $k+۱$ تای اول از σ باشد که با $(n-k-۱)$ تا -۱ ادامه می‌یابد. در این‌صورت f یک $SkSDF$ روی P_n با مینیمم وزن است و $|P_f| = \lfloor \frac{۲k+۴}{۳} \rfloor$. ■

نتیجه ۱.۱.۴ برای هر درخت n $(n \geq ۲)$ راسی T و هر عدد صحیح مثبت $k \leq n$، $\gamma_{ks}(T) \geq ۲\lfloor \frac{۲k+۴}{۳} \rfloor - n$. هرگاه $T = P_n$، تساوی برقرار است.

۲.۴ کران‌های پایین برای عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار

در این بخش کران‌های پایینی برای عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار G ارایه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴ برای هر گراف G از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی ε داریم

$$\gamma_{ks}(G) \geq n - \frac{۲\varepsilon + (n-k)(\Delta + ۲)}{\delta + ۱}.$$

برهان. فرض کنید f یک $\gamma_{ks}(G)$ — تابع باشد. به‌وضوح، $|P^+|+|M^+|\geq k$. چون هر راس v از P^+ حداکثر با $\frac{d(v)}{۲}$ راس از M، و هر راس از M^+ نیز حداکثر با $\frac{d(v)}{۲}-۱$ راس از M مجاور است لذا

$$\begin{aligned}
\delta|M| \leq \textstyle\sum_{v\in M} d(v) &= \textstyle\sum_{v\in V}|M\cap N(v)| \\
&\leq \textstyle\sum_{v\in P^+}\frac{d(v)}{۲}+\sum_{v\in M^+}(\frac{d(v)}{۲}-۱)+\sum_{(v\in P^-\cup M^-)}d(v) \\
&= \textstyle\sum_{v\in P^+}\frac{d(v)}{۲}+\sum_{v\in M^+}\frac{d(v)}{۲}+\sum_{(v\in P^-\cup M^-)}\frac{d(v)}{۲} \\
&\quad \textstyle -\sum_{v\in M^+}۱+\sum_{(v\in P^-\cup M^-)}\frac{d(v)}{۲} \\
&= \textstyle\frac{۱}{۲}\sum_{v\in V}d(v)-|M^+|+\frac{۱}{۲}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)}d(v) \\
&= \textstyle\varepsilon-|M^+|-|M^-|+|M^-|+\frac{۱}{۲}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)}d(v) \\
&\leq \textstyle\varepsilon-|M|+|M^-|+|P^-|+\frac{۱}{۲}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)}d(v) \\
&= \textstyle\varepsilon-|M|+\frac{۱}{۲}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)}(d(v)+۲) \\
&\leq \textstyle\varepsilon-|M|+(|P^-|+|M^-|)\frac{\Delta+۲}{۲}.
\end{aligned}$$

بنابراین $(\delta+۱)|M|\leq\varepsilon+(|P^-|+|M^-|)\frac{\Delta+۲}{۲}\leq\varepsilon+(n-k)\frac{\Delta+۲}{۲}$

و این نتیجه می‌دهد $|M|\leq\frac{\varepsilon+(n-k)\frac{\Delta+۲}{۲}}{\delta+۱}=\frac{۲\varepsilon+(n-k)(\Delta+۲)}{۲(\delta+۱)}$.

بنابراین

$$\gamma_{ks}(G)=n-۲|M|\geq n-\frac{۲\varepsilon+(n-k)(\Delta+۲)}{\delta+۱}\,.$$

■

قضیه ۲.۲.۴ برای هر گراف G از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی ε که درجه‌ی هر راس آن فرد است،

$$\gamma_{ks}(G)\geq n-\frac{۲\varepsilon+(n-k)(\Delta+۲)-k}{\delta+۱}\,.$$

برهان. چون درجه‌ی هر راس فرد است به راحتی دیده می‌شود که هر راس v از P^+ حداکثر با $\frac{d(v)-۱}{۲}$ راس از M و هر راس از M^+ نیز حداکثر با $\frac{d(v)-۱}{۲}-۱$ راس از M همسایه است لذا

$$\begin{aligned}
\delta|M| \leq \sum_{v\in M} d(v) &= \sum_{v\in V} |M\cap N(v)| \\
&\leq \sum_{v\in P^+} \frac{d(v)-1}{2} + \sum_{v\in M^+} (\frac{d(v)-1}{2} - 1) + \sum_{(v\in P^-\cup M^-)} d(v) \\
&= \sum_{v\in P^+} \frac{d(v)}{2} + \sum_{v\in M^+} \frac{d(v)}{2} + \sum_{(v\in P^-\cup M^-)} \frac{d(v)}{2} \\
&- \sum_{v\in P^+} \frac{1}{2} - \sum_{v\in M^+} \frac{3}{2} + \sum_{(v\in P^-\cup M^-)} \frac{d(v)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v) - \frac{1}{2}(|P^+|+|M^+|) - |M^+| + \frac{1}{2}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)} d(v) \\
&= \varepsilon - \frac{1}{2}(|P^+|+|M^+|) - |M^+| - |M^-| + |M^-| + \frac{1}{2}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)} d(v) \\
&\leq \varepsilon - \frac{1}{2}(|P^+|+|M^+|) - |M| + (|P^-|+|M^-|) + \frac{1}{2}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)} d(v) \\
&= \varepsilon - \frac{1}{2}(|P^+|+|M^+|) - |M| + \frac{1}{2}\sum_{(v\in P^-\cup M^-)} (d(v)+2) \\
&\leq \varepsilon - \frac{1}{2}(|P^+|+|M^+|) - |M| + (|P^-|+|M^-|)\frac{\Delta+2}{2}.
\end{aligned}$$

پس $(\delta+1)|M| \leq \varepsilon - \frac{k}{2} + \frac{(n-k)(\Delta+2)}{2}$

که ایجاب می‌کند $|M| \leq \frac{2\varepsilon+(n-k)(\Delta+2)-k}{2(\delta+1)}$.

بنابراین

$$\gamma_{ks}(G) = n - 2|M| \geq n - \frac{2\varepsilon + (n-k)(\Delta+2) - k}{\delta+1}.$$

■

یک نتیجه‌ی فوری قضایای ۴.۲.۱ و ۴.۲.۲ عبارت است از:

نتیجه ۴.۲.۱ برای هر گراف r − منتظم G از مرتبه‌ی n داریم

$$\gamma_{ks}(G) \geq \begin{cases} \frac{r+2}{r+1}k - n & \text{اگر } r \text{ زوج باشد} \\ \frac{r+3}{r+1}k - n & \text{اگر } r \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

نتیجه ۴.۲.۲ برای هر گراف r − منتظم G از مرتبه‌ی n داریم

$$\gamma_{s}(G) \geq \begin{cases} \frac{n}{r+1} & \text{اگر } r \text{ زوج باشد} \\ \frac{2n}{r+1} & \text{اگر } r \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

نتیجه ۳.۲.۴ برای هر گراف r − منتظم G $(r \geq ۲)$ از مرتبه‌ی n داریم

$$\gamma_{maj}(G) \geq \begin{cases} \frac{-r}{۲(r+۱)}n & \text{اگر } r \text{ زوج باشد} \\ \frac{۱-r}{۲(r+۱)}n & \text{اگر } r \text{ فرد باشد} \end{cases}.$$

قضیه ۳.۲.۴ اگر G گرافی از مرتبه n با دنباله‌ی درجات $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_n$ باشد آن‌گاه $\gamma_{ks}(G) \geq -n + \frac{۲}{d_n+۱}\sum_{j=۱}^{k}\lceil\frac{d_j+۲}{۲}\rceil$.

برهان. فرض کنید g یک $\gamma_{ks}(G)$ − تابع باشد که برای k راس متمایز v در $\{v_{j_۱}, v_{j_۲}, \ldots, v_{j_k}\}$، $g(N_G[v]) \geq ۱$. فرض کنید برای هر راس $x \in V$، $f(x) = \frac{g(x)+۱}{۲}$. در این‌صورت f یک تابع با مقادیر ۰ و ۱ است و داریم

$$\sum_{i=۱}^{k} f(N_G[v_{j_i}]) = \sum_{i=۱}^{k}\lceil\frac{g(N_G[v_{j_i}]) + d_{j_i} + ۱}{۲}\rceil \geq \sum_{i=۱}^{k}\lceil\frac{d_{j_i} + ۲}{۲}\rceil \geq \sum_{j=۱}^{k}\lceil\frac{d_j + ۲}{۲}\rceil.$$

از طرف دیگر

$$\sum_{i=۱}^{k} f(N_G[v_{j_i}]) \leq \sum_{j=۱}^{n} f(N_G[v_j]) = \sum_{j=۱}^{n}(d_i + ۱)f(v_i) \leq (d_n + ۱)f(V).$$

بنابراین $f(V) \geq \frac{۱}{d_n+۱}\sum_{j=۱}^{k}\lceil\frac{d_j+۲}{۲}\rceil$ و لذا

$$\gamma_{ks}(G) = g(V) = ۲f(V) - n \geq -n + \frac{۲}{d_n + ۱}\sum_{j=۱}^{k}\lceil\frac{d_j + ۲}{۲}\rceil.$$

■

نتیجه ۴.۲.۴ اگر G یک گراف با n راس، m یال و ماکزیمم درجه‌ی Δ باشد آن‌گاه $\gamma_{ks}(G) \geq k - ۲n + \frac{۲m+n+k}{\Delta+۱}$.

برهان. بنابه قضیه‌ی ۳.۲.۴ داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{ks}(G) &\geq -n+\frac{۲}{d_n+۱}\sum_{j=۱}^{k}\lceil\frac{d_j+۲}{۲}\rceil \geq -n+\frac{۲k+\sum_{j=۱}^{k}d_j}{\Delta+۱}\\ &= -n+\frac{۲k+۲m-\sum_{j=k+۱}^{n}d_j}{\Delta+۱} \geq -n+\frac{۲k+۲m-(n-k)\Delta}{\Delta+۱}\\ &= k-۲n+\frac{۲m+n+k}{\Delta+۱}\ .\end{aligned}$$

■

۳.۴ کران‌های بالا برای عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار

در این بخش کران‌ها بالایی برای عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار ارایه می‌کنیم.

بنابر قضیه‌ی ۳.۲.۲ برای هر گراف همبند G از مرتبه‌ی n،

$$\gamma_{maj}(G) \leq \begin{cases} ۱ & \text{فرد باشد } n \\ ۲ & \text{زوج باشد } n \end{cases}.$$

چون هر تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار یک $SkSDF$ به ازای هر $k \leq \lceil\frac{|V|}{۲}\rceil$ است، لذا نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱.۳.۴ برای هر گراف همبند G با n راس و هر عدد صحیح مثبت $k \leq \lceil\frac{n}{۲}\rceil$،

$$\gamma_{ks}(G) \leq \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۲ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

از این‌که برای هر $k \leq n+۱$، $\gamma_{ks}(K_{۲n+۱}) = ۱$ و $\gamma_{ks}(K_{۲n}) = ۲$، کران بالا دقیق است.

قضیه ۱.۳.۴ برای هر گراف همبند G از مرتبه‌ی n و هر $\frac{n}{۲} < k \leq n$ داریم

$$\gamma_{ks}(G) \leq 2\lceil \frac{k}{n-k+1} \rceil (n-k+1) - n\ .$$

برهان. در بین تمامی افرازهای $\{A'_{11}, A'_{12}\}$ از $V(G)$ با $|A'_{11}| = k$ و $|A'_{12}| = n-k$، فرض کنید $\{A_{11}, A_{12}\}$ افرازی باشد که تعداد یال‌های بین $G[A_{11}]$ و $G[A_{12}]$ مینیمم است. تا آخر برهان تابع h را روی A_{ij} $(j=1,2)$ تعریف کنید: برای هر $v \in A_{ij}$، $h(v) = |N(v) \cap A_{ij}| - |N(v) \cap A_{i(3-j)}|$.
توجه کنید که برای هر $u \in A_{11}$، $v \in A_{12}$، اگر $uv \notin E(G)$، آن‌گاه

$$h(u) + h(v) \geq 0. \qquad (1)$$

اگر $uv \in E(G)$، آن‌گاه

$$h(u) + h(v) \geq -2. \qquad (2)$$

در غیر این‌صورت با تعویض رل u و v به افرازی می‌رسیم که تعداد یال‌های مابین $G[A_{11}]$ و $G[A_{12}]$ کمتر باشد و این یک تناقض است.
اگر برای هر $u \in A_{11}$، $h(u) \geq 0$، تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_{11} \\ -1 & x \in A_{12} \end{cases}.$$

به وضوح f یک $SkSDF$ روی G با $w(f) \leq 2k-n$ است. لذا می‌توانیم فرض کنیم راس $u_1 \in A_{11}$ با $h(u_1) < 0$ موجود است. در این‌صورت برای هر $v \in A_{12}$، با استفاده از (۱) و (۲) خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll} h(v) > 0 & \text{اگر } v \notin N(u_1) \\ h(v) \geq -1 & \text{اگر } v \in N(u_1) \end{array}$$

در بین همه‌ی افرازهای $\{A'_{21}, A'_{22}\}$ از $A_{11} - \{u_1\}$ با $|A'_{21}| = 2k-n-1$ و $|A'_{22}| = n-k$، فرض کنید $\{A_{21}, A_{22}\}$ چنان باشد که تعداد یال‌های بین $G[A_{21}]$ و $G[A_{22}]$ مینیمم است. اگر برای هر $u \in A_{21}$، $h(u) \geq 0$، تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in A_{21} \cup A_{12} \cup \{u_1\} \\ -1 & \text{اگر } x \in A_{22} \end{cases}.$$

به‌راحتی می‌توان دید که f یک $SkSDF$ روی G با $w(f) \leq 2k-n$ است، لذا $\gamma_{ks}(G) \leq 2k-n$.
پس می‌توانیم فرض کنیم راس $u_2 \in A_{21}$ با $h(u_2) < 0$ وجود دارد. در این‌صورت برای هر $v \in A_{22}$، از انتخاب $\{A_{21}, A_{22}\}$ خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll} h(v) > 0 & \text{اگر } v \notin N(u_2) \\ h(v) > -1 & \text{اگر } v \in N(u_2) \end{array}$$

بحث مشابهی برای $A_{21} - \{u_2\}$ نشان می‌دهد که یا $\gamma_{ks}(G) \leq 2k-n$ یا $u_i \in A_{i1}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lceil\frac{k}{n-k+1}\rceil)$ وجود دارد که $h(u_i) < 0$. لذا برای هر $v \in A_{22}$، از انتخاب $\{A_{i1}, A_{i2}\}$ خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll} h(v) > 0 & \text{اگر } v \notin N(u_i) \\ h(v) \geq -1 & \text{اگر } v \in N(u_i) \end{array}$$

تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_{12} \cup A_{22} \cup \cdots \cup A_{\lceil\frac{k}{n-k+1}\rceil 2} \cup \{u_1, u_2, \ldots u_{\lceil\frac{k}{n-k+1}\rceil}\}, \\ -1 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}.$$

در این‌صورت f یک $SkSDF$ روی G با $w(f) \leq 2\lceil\frac{k}{n-k+1}\rceil(n-k+1)-n$ است و برهان تمام است. ■

می‌خواهیم این کران را برای هر $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$، به یک کران برای γ_{ks} برای $k \in \{1, \ldots, n\}$ توسیع دهیم لذا به تعاریف زیر نیاز داریم.

دقت کنید که در هر درختی حداقل راسی مجاور با یک برگ وجود دارد که حداکثر با یک راس غیر برگ مجاور است. فرض کنید $r(T)$ شعاع T و $C(T)$ مرکز T را نمایش دهند. فرض کنید $z \in C(T)$ و برگ y را در فاصله‌ی $r(T)$ از z در نظر بگیرید و فرض کنید $N(y) = \{x\}$. در این‌صورت x راسی از T است که با یک برگ مجاور است و حداکثر یک همسایه‌ی غیر برگ دارد. درخت T' یک زیردرخت کامل از T است هرگاه $T' = T$ یا یال e از T وجود داشته باشد که T' یک مولفه از $T-e$ است و در حالت اخیر، اگر $e = uv$ به‌طوری‌که $u \in V(T')$، گوییم T' در u **افزوده شده** است. هرگاه $T' \cong K_{1,m}$ یک زیردرخت کامل از T باشد، در این‌صورت T' یک زیرستاره‌ی کامل از T نامیده می‌شود. توجه کنید که اگر T' یک زیردرخت کامل افزوده شده در راسی چون x از T باشد که x با یک برگ مجاور

است آن‌گاه T' یک زیرستاره کامل از T به مرکز x است.

فرض کنید L مجموعه‌ی برگ‌های T را نشان دهد. برای هر $v \in V$ تعریف می‌کنیم، $L(v) = N(v) \cap L$ و $l(v) = |L(v)|$. هرگاه امکان ابهام باشد، نمادها را به ترتیب با $L(T)$، $L_T(v)$ و $l_T(v)$ تعویض می‌کنیم و هرگاه در ساختاری $T = S_i$، به جای $l_T(v)$، می‌نویسیم $l_i(v)$.

قضیه ۲.۳.۴ برای هر درخت n راسی T و هر عدد صحیح $k \in \{۱, \ldots, n\}$،

$$\gamma_{ks}(T) \leq ۲(k + ۱) - n.$$

برهان. هرگاه $T = K_۲$ یا $k = ۱$ باشد، نتیجه به‌وضوح برقرار است. لذا فرض می‌کنیم $k \geq ۲$ و $n \geq ۳$. قرار دهید $S_۰ = T$ و $s_۰ = k$. یک دنباله از زیردرخت‌های T مانند $T_۱, T_۲, \ldots, T_r$ را مطابق زیر می‌سازیم.

اگر $S_۰$ شامل یک زیرستاره‌ی کامل $G_۱$ با مرکز $v_۱$ باشد که $s_۰ \leq l_۰(v_۱)$، آن‌گاه $T_۱$ را زیردرخت $S_۰$ بگیرید که توسط $v_۱$ و همه‌ی $s_۰$ برگ $G_۱$ القا می‌شود و قرار دهید $s_۱ = -۱$. در غیر این‌صورت، $T_۱$ را یک زیردرخت کامل (غیر بدیهی) از $S_۰$ با مرتبه‌ی $k_۱ \leq s_۰$ و (هرگاه $T_۱ \neq S_۰$) افزوده شده در $v_۱$ بگیرید و تعریف کنید $s_۱ = s_۰ - k_۱$. با ادامه‌ی این روند، هرگاه $s_i > ۰$، تعریف کنید $S_i = S_{i-۱} - T_i$ و هرگاه S_i شامل یک زیرستاره‌ی کامل $G_{i+۱}$ با مرکز $v_{i+۱}$ باشد که $s_i \leq l_i(v_{i+۱})$، $T_{i+۱}$ را زیردرخت S_i بگیرید که توسط $v_{i+۱}$ و همه‌ی s_i برگ $G_{i+۱}$ القا می‌شود و قرار دهید $s_{i+۱} = -۱$، در غیر این‌صورت، $T_{i+۱}$ را زیردرخت کامل از S_i از مرتبه‌ی $k_{i+۱} \leq s_i$ و (اگر $T_{i+۱} \neq S_i$) افزوده شده در $v_{i+۱}$ در نظر بگیرید و قرار دهید $s_{i+۱} = s_i - k_{i+۱}$. لذا یک دنباله‌ی متناهی از زیردرخت‌های مجزای $T_۱, T_۲, \ldots, T_r$ از T و یک دنباله از اعداد صحیح $s_۰ > s_۱ > \cdots > s_r$ به‌دست می‌آوریم که $s_r \in \{۰, -۱\}$. فرض کنید F یک زیرگراف (احتمالا ناهمبند) از T باشد که توسط $\bigcup_{i=۱}^{r} V(T_i)$ القا می‌شود. توجه کنید اگر $s_r = -۱$، آن‌گاه $|V(F)| = k + ۱$ و در غیر این‌صورت $|V(F)| = k$. نگاشت

$f : V(T) \to \{-۱,۱\}$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$.f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \in V(F) \\ -۱ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

توجه کنید که برای هر $i = ۱,۲,\dots,r$، v_i تنها راس از T_i است که ممکن است با راسی از $S_r = T - F$ مجاور باشد. و چون T_i کامل است (اگر $s_r = -۱$ به جز احتمالا T_r)، v_i (به جز احتمالا v_r) حداکثر با یک راس از S_r مجاور است. به‌علاوه، اگر v_i $(i = ۱,\dots,r)$ با راسی از S_r مجاور باشد، $v_i \notin L(T)$ (چون T_i غیر بدیهی است). بنابراین f به‌جز احتمالا v_r همه‌ی راس‌های F را می‌پوشاند. در این حالت، f حداقل k راس از T را پوشش می‌دهد و در نتیجه $w(f) \leq ۲(k+۱) - n$. ■

از آن‌جا که برای هر $k \leq \frac{n}{۲}$، $\gamma_{ks}(k_{۱,n-۱}) = ۲(k+۱) - n$، دقیق بودن کران بالا واضح است. با این وجود قادر نیستیم درختی با n راس بیابیم که برای هر $k > \frac{n}{۲}$، $\gamma_{ks} = ۲(k+۱) - n$. در سال ۱۹۹٦ کوکاین و ماینهارت [۴] دو حدس زیر را مطرح کردند.

حدس ۱.۳.۴ برای هر درخت با n راس و هر $\frac{n}{۲} < k \leq n$، $\gamma_{ks} \leq ۲k - n$.

حدس ۲.۳.۴ برای هر گراف همبند با n راس و هر $\frac{n}{۲} < k \leq n$، $\gamma_{ks} \leq ۲k - n$.

حدس ۱.۳.۴ توسط چانگ ، لیاو و یه [۳] در سال ۲۰۰۲ اثبات شده است ولی درستی حدس ۲.۳.۴ هنوز ثابت نشده است.

قضیه ۳.۳.۴ برای هر درخت T از مرتبه‌ی n و هر $\frac{n}{۲} < k \leq n$، $\gamma_{ks}(T) \leq ۲k - n$.

برهان. تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب g روی T، تابعی است که $g(V(T)) = ۲k - n$ و به‌طور دقیق k راس خوب دارد و آن راس‌هایی چون v است که $g(v) = ۱$ و $g(N_G[v]) \geq ۱$. صورت قوی‌تر

از قضیه‌ی فوق را ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم T یک تابع k زیراحاطه‌گر خوب دارد. فرض کنید که این گزاره درست نباشد.

درخت T را با مینیمم تعداد راس انتخاب کنید که تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب ندارد. واضح است که $k \leq n-۱$.

ادعای ۱: راس مجاور یک برگ در T از درجه‌ی فرد است.

اثبات: فرض کنید x یک برگ باشد که تنها همسایه‌ی آن y از درجه‌ی زوج است. قرار دهید $T' = T - \{x\}$. چون $\frac{n-۱}{۲} < k \leq n-۱$، بنابر انتخاب T، درخت T' یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g' دارد. نگاشت $g : V(T) \to \{-۱,۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید: برای هر $v \in V(T) - \{x\}$، $g(v) = g'(v)$ و $g(x) = -۱$. در این‌صورت g تعمیمی از g' است به‌طوری‌که برای هر $v \in V(T) - \{x,y\}$، $g(N_T[v]) = g'(N_{T'}[v])$ و $g(N_T[y]) = g'(N_{T'}[y]) - ۱$. چون $d_T(y)$ زوج است، لذا $|N_{T'}[y]|$ زوج است. در نتیجه از این‌که، $g'(N_{T'}[y]) \geq ۱$ داریم $g(N_T[y]) \geq ۱$. بنابراین g یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب روی T است که این یک تناقض می‌باشد.

فرض کنید $P : v_۱v_۲\dots v_m$ طولانی‌ترین مسیر در T باشد. توجه کنید $m \geq ۴$، در غیر این‌صورت T یک ستاره است و برای هر $k > \frac{n}{۲}$، تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب دارد. توجه کنید که $v_۲$ دقیقا با یک راس غیر برگ مانند $v_۳$ مجاور است. بنابر ادعای (۱)، $v_۲$ با $۲a \geq ۲$ برگ مجاور می‌باشد. هم‌چنین، $v_{m-۱}$ دقیقا با یک راس غیر برگ چون $v_{m-۲}$ و $۲b \geq ۲$ برگ مجاور است. می‌توانیم فرض کنیم $a \geq b$، در غیر این‌صورت به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$، نام راس v_i را به $v_{n+۱-i}$ عوض کنید. فرض کنید $m \geq ۵$، در غیر این‌صورت $n = ۲a + ۲b + ۲$ و $k > \frac{n}{۲} = a + b + ۱$. مجموعه‌های $S_a \subseteq N(v_۲) - \{v_۳\}$ با $|S_a| \geq a$ و $S_b \subseteq N(v_۳) - \{v_۲\}$ با $|S_b| \geq b$ را چنان انتخاب کنید که $|S_a| + |S_b| = k - ۲$. در این‌صورت یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب g از T وجود دارد که برای $v \in S_a \cup S_b \cup \{v_۲, v_۳\}$، $g(v) = ۱$ و برای سایر راس‌ها مقدار -۱ نسبت می‌دهد.

ادعای ۲: همسایه‌های $v_۳$ که در P نیستند، برگ هستند و $m \geq ٦$.

اثبات: فرض کنید $v_۳$ یک همسایه‌ی غیر برگ چون x دارد که در P نیست یا $m = ۵$، در این حالت قرار دهید $x = v_۴$. چون P طولانی‌ترین مسیر در T است یا $x = v_۴$ (برای $m = ۵$)، همه‌ی همسایه‌های x به جز $v_۳$ برگ هستند. بنابر ادعای (۱)، فرض کنید x با $۲c \geq ۲$ برگ مجاور است. به‌علاوه، می‌توانیم فرض کنیم $a \geq c$، در غیر این‌صورت کافی است نقش $v_۲$ و x را عوض کنیم. فرض کنید درخت $T' = T - (N_T[v_۲] \cup N_T[x] - \{v_۳\})$، T' n' راس دارد و $k' = k - a - c - ۱$. در این‌صورت $n' = n - ۲a - ۲c - ۲$ و $k' > \frac{n'}{۲}$. اگر $k' > n'$، آن‌گاه $k \geq n - a - c$ و لذا T یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g دارد که برای هر v به غیر از حداکثر a برگ مجاور $v_۲$ و حداکثر c برگ مجاور x، $g(v) = +۱$ است و برای بقیه‌ی راس‌ها مقدار ۱− نسبت می‌دهد که این یک تناقض است. حال فرض کنید $\frac{n'}{۲} < k' \leq n'$. در این‌صورت بنابر انتخاب T، T' یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g' دارد. فرض کنید S مجموعه‌ی راس‌های شامل $v_۲$ و $a + c$ برگ مجاور $v_۲$ باشد. g' را با تعریف زیر به تابع $g : V(T) \to \{-۱, ۱\}$ گسترش می‌دهیم. برای هر $v \in V(T')$، $g(v) = g'(v)$، برای هر $v \in S$، $g(v) = ۱$ و برای هر $v \in N_T[x] \cup N_T[v_۲] - (S \cup \{v_۳\})$، $g(v) = -۱$. بنابراین برای هر $v \in S - \{v_۲\}$، $g(N_T[v]) = ۲$ و $g(N_T[v_۲]) = a + c + ۱ - (a - c) + g(v_۳) \geq ۲$. هم‌چنین، چون $g(v_۲) = ۱$ و $g(x) = -۱$، داریم $g(N_T[v_۳]) = g'(N_{T'}[v_۳])$. در این‌صورت برای هر $v \in V(T')$، $g(N_T[v]) = g'(N_{T'}[v])$. بنابراین g، $k = k'+a+c+۱$ راس خوب دارد که تناقض است.

ادعای ۳: راس $v_۳$ (به طور مشابه $v_{m-۲}$) حداکثر با یک برگ مجاور است.

گیرید $v_۳$ حداقل با یک برگ مجاور باشد بنابر ادعای (۱) تعداد چنین برگ‌هایی فرد است. فرض کنید سه برگ x، y و z در $N_T(v_۳) - P$ باشند. درخت $T' = T - (\{x, y, z\} \cup N_T[v_۲] - \{v_۳\})$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت T'، n' راس دارد. گیرید $k' = k - a - ۲$. در این‌صورت $n' = n - ۲a - ۴$ و $k' > \frac{n'}{۲}$. هرگاه $k' > n'$، $k \geq n - a - ۱$ است آن‌گاه T یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g دارد که برای هر راس v به غیر از x و حداکثر a برگ مجاور $v_۲$، $g(v) = ۱$ است و برای بقیه‌ی راس‌ها g مقدار ۱− نسبت می‌دهد که یک تناقض است. حال فرض کنید $\frac{n'}{۲} < k' \leq n'$. در این‌صورت بنابر

انتخاب T، T' یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g' دارد. فرض کنید S مجموعه‌ی راس‌های شامل v_2 و $a+1-\frac{g'(v_3)+1}{2}$ از برگ‌های آن باشد. g' را با تعریف زیر به تابع $g:V(T)\to\{-1,1\}$ گسترش می‌دهیم. برای هر $v\in V(T')$، $g(v)=g'(v)$، $g(x)=g'(v_3)$، برای هر $v\in S$، $g(v)=+1$ و برای هر $v\in\{y,z\}\cup N[v_2]-(S\cup\{v_3\})$، $g(v)=-1$. بنابراین برای هر $v\in S$، $g(N_T[v])=2$. از این‌که $g(N_T[v_3])=g'(N_{T'}[v_3])+g(v_2)+g(x)+g(y)+g(z)=g'(N_{T'}[v_3])+g'(v_3)-1$، هرگاه $g'(v_3)=1$ داریم $g(N_T[v_3])=g'(N_{T'}[v_3])$ و $g(N_T[x])=2$. بنابراین g، $k=k'+|S|+\frac{g'(v_3)+1}{2}$ راس خوب دارد که $\frac{g'(v_3)+1}{2}$ تای آن به‌خاطر x است که این یک تناقض است.

حال یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب روی T تعریف می‌کنیم تا اثبات کامل شود. اگر x برگ منحصربه‌فردی باشد که با v_3 مجاور است و x در P نیست آن‌گاه قرار دهید $x'=v_3$؛ در غیر این‌صورت $N_T(v_3)=\{v_2,v_4\}$، و قرار دهید $x=v_3$ و $x'=v_4$. اگر y برگ منحصربه‌فردی باشد که با v_{m-2} مجاور است و y در P نیست، قرار دهید $y'=v_{m-2}$، در غیر این‌صورت $N_T(v_{m-2})=\{v_{m-1},v_{m-3}\}$، و قرار دهید $y=v_{m-2}$ و $y'=v_{m-3}$. گیرید درخت $T'=T-((N_T[v_2]\cup N_T[v_{m-1}]-\{v_3,v_{m-2}\})\cup\{x,y\})$، n' راس داشته و $k'=k-a-b-2$ باشد در این‌صورت $n'=n-2a-2b-4$ و $k'\geq\frac{n'}{2}$.

هرگاه $k'>n'$ آن‌گاه $k\geq n-a-b-1$. برای حالت $k\geq n-a-b$، T یک تابع $k'-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g دارد که برای هر راس v به جز حداکثر a برگ v مجاور v_2 و حداکثر b برگ v مجاور با v_{m-1}، $g(v)=+1$ و برای بقیه‌ی راس‌ها g مقدار -1 نسبت می‌دهد. برای حالت $k=n-a-b-1$، T یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g دارد که برای هر راس v به جز دقیقا $a-b$ برگ مجاور v_2 و راس‌های متعلق به $N[v_{m-1}]-\{v_{m-2}\}$، $g(v)=+1$ و برای بقیه‌ی راس‌ها، g مقدار -1 نسبت می‌دهد.

اینک حالتی را در نظر بگیرید که $\frac{n'}{2}<k'\leq n'$. در این‌صورت T' یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب چون g' دارد. تابع g را به‌صورت زیر روی $V(T)$ می‌سازیم: گیرید برای هر $v\in V(T')$، $g(v)=g'(v)$. اگر $g'(y')=1$، آن‌گاه قرار دهید $g(y)=1$ و $i=1$، در غیر این‌صورت قرار

دهید $g(y) = -۱$ و $i = ۰$. فرض کنید برای هر $v \in N_T[v_{m-۱}] - \{v_{m-۲}\}$، $g(v) = -۱$. اگر $g'(x') = ۱$، آن‌گاه قرار دهید $g(x) = ۱$ و $j = ۱$، در غیر این‌صورت $g(x) = -۱$ و $j = ۰$. برای حالت $i = j = ۰$ و $x \neq v_۳$، قرار دهید $g(v_۳) = g(x) = i = j = ۱$ و برای $i = j = ۰$ و $x = v_۳$، قرار دهید $g(v_۳) = i = ۱$. فرض کنید g به $v_۲$ و $a + b + ۱ - i - j \leq a + b$ برگ از $N_T(v_۲)$ مقدار $+۱$ و به بقیه‌ی برگ‌ها مقدار -۱ بدهد. چون g، این خاصیت از g' را که برای هر راس $v \in V(T')$ با $g'(v) = ۱$، $g'(N_{T'}[v]) \geq ۱$ حفظ می‌کند و برای $a + b + ۲$ راس v ای که در T' نیستند یا $g'(v) = -۱$، $g(v) = ۱$ و $g(N_T[v]) \geq ۱$. بنابراین g یک تابع $k-$ زیراحاطه‌گر خوب از T است. ■

فصل ۵

k — زیراحاطه‌ی یالی علامت‌دار

مقدمه

تابع $f : E(G) \to \{-۱, ۱\}$ را یک **تابع k — زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار** ($SEkSDF$) برای G گوییم هرگاه حداقل k تا از یال‌های G توسط f پوشانده شوند. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع k — زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمال** یا $\gamma'_{ks}(\mathrm{G})$ — **تابع** نامیده می‌شوند. وزن تابع k — زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمال را **عدد k — زیراحاطه‌ای یالی علامت‌دار** نامیده و با $\gamma'_{ks}(G)$ نشان خواهیم داد. برای هر تابع $SEkSDF$، P_f، M_f و C_f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_f = \{e \in E(G) | f(e) = +۱\},$$

$$M_f = \{e \in E(G) | f(e) = -۱\},$$

$$C_f = \{e \in E(G) | f(N[e]) \geq ۱\}.$$

P^+، P^-، M^+ و M^- همانند فصل‌های قبل تعریف می‌شوند.

۱.۵ قضایا و نتایج پیش‌نیاز

قضیه ۱.۱.۵ [۱۳] برای هر درخت از مرتبه‌ی $n \geq ۲$، $\gamma'_s(T) \geq ۱$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر T هیچ راسی از درجه‌ی زوج نداشته باشد و برای هر راس $v \in V(T)$، $l(v) \geq \lfloor\frac{d(v)-۱}{۲}\rfloor$، که در آن $l(v)$ نشان دهنده‌ی تعداد یال‌های آویزان از راس v است. به‌علاوه، اگر $\gamma'_s(T) = ۱$ و f یک $\gamma'_s(T)-$ تابع باشد آن‌گاه برای هر راس با درجه‌ی بیشتر از یک داریم $f(v) = ۱$.

قضیه ۲.۱.۵ [۱۷] اگر G گرافی با $\delta(G) \geq ۱$ باشد آن‌گاه $\gamma'_s(G) \geq |V(G)| - |E(G)|$ و این کران دقیق است.

فرض کنید $G_\circ$ گردایه‌ی تمام گراف‌های همبند ساده از مرتبه‌ی $n \geq ۲$ باشد که درجه‌ی هر راس آن فرد بوده و برای هر راس v، $l(v) \geq \frac{d(v)-۱}{۲}$.

قضیه ۳.۱.۵ [۱۲] فرض کنید G یک گراف همبند ساده از مرتبه‌ی $n \geq ۲$ و اندازه‌ی m باشد. در این‌صورت $\gamma'_s(G) = n - m$ اگر و فقط اگر $G \in G_\circ$. به‌علاوه، اگر $\gamma'_s(G) = n - m$ و f یک $\gamma'_s(G)-$ تابع باشد آن‌گاه شرایط زیر برقرار هستند.

۱: برای هر یال غیر آویزان $e \in E(G)$، $f(e) = ۱$.

۲: برای هر راس با درجه‌ی بیشتر از یک، $f(v) = ۱$.

۳: برای هر $e \in E(G)$، $f(N[e]) = ۱$.

قضیه ۴.۱.۵ [۱۸] برای هر عدد صحیح مثبت m تعریف کنید

$$\Psi(m) = min\{\gamma'_s(G) | \text{گرافی از اندازه‌ی } m \text{ است } G\}.$$

در این‌صورت

$$\Psi(m) = ۲\lceil\frac{۱}{۳}\lceil\frac{\sqrt{۲۴m+۲۵}+۶m+۵}{۶}\rceil\rceil - m.$$

قضیه ۵.۱.۵ [۱۴] فرض کنید Ψ مانند قضیه‌ی قبل تعریف شده باشد. در این‌صورت

۱: Ψ یک تابع صعودی است،

۲: برای هر عدد صحیح مثبت m، $m \geq \Psi(m)$،

۳: برای هر جفت عدد صحیح مثبت a و b، $\Psi(a)+\Psi(b) \geq \Psi(a+b)$.

قضیه ۶.۱.۵ [۱۴] فرض کنید G یک گراف ساده از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ و اندازه‌ی m باشد. در این‌صورت

$$\gamma'_{maj}(G) \geq \Psi(\lceil\frac{m}{۲}\rceil) - \lfloor\frac{m}{۲}\rfloor.$$

به‌علاوه این کران دقیق است.

قضیه ۷.۱.۵ [۶] برای $n \geq ۳$ و $۱ \leq k \leq n-۱$،

$$\gamma_{ks}(C_n) \leq \begin{cases} \frac{n-۲}{۳} & \text{اگر } k=n-۱ \text{ و } k \equiv ۱ \pmod{۳} \\ ۲\lfloor\frac{۲k+۴}{۳}\rfloor - n & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}.$$

تعریف: فرض کنید G یک گراف با مینیمم درجه‌ی $\delta(G) \geq ۱$ باشد. تابع $f: E(G) \rightarrow \{-۱,۱\}$ را یک تابع خوب گوییم هرگاه برای هر $v \in V(G)$، $f(v) = \sum_{e\in E(v)} f(e) \geq ۰$.

قضیه ۸.۱.۵ [۱۵] برای هر گراف G از مرتبه‌ی $n \geq ۲$، اندازه‌ی m و $\delta(G) \geq ۱$، یک تابع خوب f وجود دارد که $\sum_{e\in E(G)} f(e) \leq o + \frac{۱-(-۱)^m}{۲}$ که در آن $o \leq ۲\lfloor\frac{n}{۲}\rfloor$ تعداد راس‌های با درجه‌ی فرد در G است.

۲.۵ چند نتیجه‌ی ساده

اثبات قضیه‌ی زیر سرراست است و از بیان آن صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۵ برای هر گراف بدون راس منفرد G از مرتبه‌ی $n \geq ۲$، $\gamma'_{ks}(G) = \gamma_{ks}(L(G))$.

نتایج زیر بلافاصله و به‌ترتیب از قضیه‌ی ۱.۲.۵ با قضایای ۳.۱.۴، ۷.۱.۵، نتیجه‌ی ۱.۳.۴ و قضیه‌ی ۱.۳.۴ حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۲.۵ برای هر $n \geq ۳$ و $۱ \leq k \leq n-۱$، $\gamma'_{ks}(P_n) = ۲\lfloor\frac{۲k+۴}{۳}\rfloor - n + ۱$.

نتیجه ۲.۲.۵ برای هر $n \geq ۳$ و $۱ \leq k \leq n-۱$،

$$\gamma'_{ks}(C_n) \leq \begin{cases} \frac{n-۲}{۳} & \text{اگر } k = n-۱ \text{ و } k \equiv ۱ \pmod{۳} \\ ۲\lfloor\frac{۲k+۴}{۳}\rfloor - n & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}.$$

نتیجه ۳.۲.۵ برای هر گراف همبند G از اندازه‌ی m و هر عدد صحیح مثبت $k \leq \lceil\frac{m}{۲}\rceil$

$$\gamma'_{ks}(G) \leq \begin{cases} ۱ & m \text{ فرد باشد} \\ ۲ & m \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

این کران برای گراف‌های ستاره دقیق است.

نتیجه ۴.۲.۵ برای هر گراف همبند G از اندازه‌ی m و هر عدد صحیح مثبت k با $\frac{m}{۲} < k \leq m$،

$$\gamma'_{ks}(G) \leq ۲\lceil\frac{k}{m-k+۱}\rceil(m-k+۱)-m.$$

۳.۵ عدد $k-$ زیراحاطه‌ای یالی علامت‌دار برای حاصل‌ضرب دکارتی

قضیه ۱.۳.۵ فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی $n_G \geq ۲$ و اندازه‌ی m_G با o_G راس از درجه‌ی فرد و H یک گراف از مرتبه‌ی $n_H \geq ۲$ و اندازه‌ی m_H با o_H راس از درجه‌ی فرد باشد. اگر $k \leq min\{n_H m_G, n_G m_H\}$، آن‌گاه $\gamma'_{ks}(G\Box H)$ حداکثر برابر است با

$$min\{n_H\gamma'_{\lceil\frac{k}{n_H}\rceil s}(G)+n_G(o_H+\frac{۱-(-۱)^{m_H}}{۲}), n_G\gamma'_{\lceil\frac{k}{n_G}\rceil s}(H)+n_H(o_G+\frac{۱-(-۱)^{m_G}}{۲})\}.$$

برهان. فرض کنید $k = n_H t - l$ که $۰ < t \leq m_G$ و $۰ \leq l < n_H$. فرض کنید f_G یک $\gamma'_{ts}(G)-$ تابع باشد و برای t یال متمایز e در $\{u_۱v_۱,\dots,u_tv_t\}$، $f_G(e) \geq ۱$. بنابر قضیه‌ی ۸.۱.۵ یک تابع خوب چون g_H از H وجود دارد که $\sum_{e\in E(H)} g_H(e) \leq o_H + \frac{۱-(-۱)^{m_H}}{۲}$. تابع $f : E(G\Box H) \to \{-۱,۱\}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f((u,x),(v,x)) = f_G(uv) \qquad \text{اگر } x\in V(H) \text{ و } uv\in E(G)$$
$$f((u,x),(u,y)) = g_H(xy) \qquad \text{اگر } u\in V(G) \text{ و } xy\in E(H)$$

اگر $i = ۱,\dots,t$ و $x \in V_H$، آن‌گاه

$$f[((u_i,x),(v_i,x))] = \sum_{e\in N_G[u_i,v_i]} f_G(e) + ۲\sum_{e\in E_H(x)} g_H(e) \geq ۱.$$

چون $\sum_{e\in E(G\square H)} f(e) = n_H \sum_{e\in E(G)} f_G(e) + n_G \sum_{e\in E(H)} g_H(e)$، داریم

$$\gamma'_{ks}(G\square H) \leq n_H \gamma'_{\lceil \frac{k}{n_H}\rceil s}(G) + n_G(o_H + \frac{۱-(-۱)^{m_H}}{۲}).$$

به طور مشابه می‌توان دید

$$\gamma'_{ks}(G\square H) \leq n_G \gamma'_{\lceil \frac{k}{n_G}\rceil s}(H) + n_H(o_G + \frac{۱-(-۱)^{m_G}}{۲})$$

و برهان تمام است. ■

۴.۵ کران‌های پایین برای عدد $k-$ زیراحاطه‌ای یالی علامت‌دار

قضیه ۱.۴.۵ برای هر گراف ساده از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ و اندازه‌ی m و هر عدد صحیح مثبت $۱ \leq k \leq m$ داریم

$$\gamma'_{ks}(G) \geq \Psi(k) - (m-k)\ .$$

به‌علاوه، این کران دقیق است.

برهان. حکم به‌وضوح برای گراف‌های ساده از اندازه‌ی $m = ۱,۲,۳$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم $m \geq ۴$. گیرید حکم برقرار نباشد و فرض کنید G یک گراف ساده از اندازه‌ی $m \geq ۴$ باشد به‌طوری‌که $\gamma'_{ks}(G) < \Psi(k) - (m-k)$. چنین گراف G را با کم‌ترین تعداد یال ممکن در نظر می‌گیریم که برای آن $\lambda(G) + |T(G)|$ ماکزیمم باشد که در آن $\lambda(G)$ تعداد مولفه‌های G بوده و $T(G) = \{u \in V(G) : d(u) \leq ۲\}$. بدون خلل به کلیت اثبات، می‌توانیم فرض کنیم که G راس منفرد ندارد. فرض کنید f یک $\gamma'_{ks}(G)-$ تابع باشد. گیرید $G_۱,\dots,G_{\lambda(G)}$ مولفه‌های همبندی G باشند. اگر برای هر $۱ \leq i \leq \lambda(G)$، $G_i \cong K_۲$، آن‌گاه به‌وضوح $\gamma'_{ks}(G) = k-(m-k) \geq \Psi(k) - (m-k)$. فرض کنید G مولفه‌ای چون H از اندازه‌ی حداقل ۲ داشته باشد.

ادعای ۱: $E(H)\cap M\subseteq C$.

فرض کنید $e\in E(H)\cap M$. گیرید چنین نباشد یعنی $e\notin C_f$. فرض کنید G' از $G-e$ با افزودن مولفه‌ی جدید $u_\circ v_\circ$ به‌وجود آمده باشد. نگاشت $g:E(G')\rightarrow\{-۱,۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید: $g(u_\circ v_\circ)=-۱$ و به ازای هر $x\in E(G)-\{e\}$، $g(x)=f(x)$. به وضوح، g یک $SEkSDF$ روی G' با $w(g')=w(f)$ است و $\lambda(G')+|T(G')|>\lambda(G)+|T(G)|$ که یک تناقض با انتخاب f است. پس $e\in C$.

ادعای ۲: برای هر یال غیر آویزان $e=uv\in E(H)\cap M$، $d(u)=d(v)=۲$.

اگر $f(u)\geq ۱$ (حالت $f(v)\geq ۱$ مشابه است) آن‌گاه فرض کنید G' از $G-e$ با افزودن یال آویزان uv' به‌وجود آمده باشد. نگاشت $g:E(G')\rightarrow\{-۱,۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید: $g(uv')=-۱$ و به ازای هر $x\in E(G)-\{e\}$، $g(x)=f(x)$. به وضوح g یک $SEkSDF$ روی G' است که $w(g')=w(f)$ و $\lambda(G')+|T(G')|>\lambda(G)+|T(G)|$. این یک تناقض است. بنابراین $f(u)=f(v)=\circ$. از این‌رو $d(u)$ و $d(v)$ زوج هستند. فرض کنید $d(u)\geq ۴$ (حالت $d(v)\geq ۴$ مشابه است). در این‌صورت یالی چون $e'=uw$ در u با $f(e')=۱$ وجود دارد. فرض کنید G' از $G-\{e,e'\}$ با افزودن راس جدید z و دو یال vz و wz به‌وجود آمده باشد. نگاشت $g:E(G')\rightarrow\{-۱,۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید: $g(wz)=+۱$، $g(vz)=-۱$ و برای هر $x\in E(G)-\{e,e'\}$، $g(x)=f(x)$. واضح است که g یک $SEkSDF$ روی G' با $w(g')=w(f)$ است و $\lambda(G')+|T(G')|>\lambda(G)+|T(G)|$ که به تناقض منجر می‌شود. بنابراین $d(u)=d(v)=۲$.

ادعای ۳: فرض کنید $e=uv\in E(H)\cap M$ یک یال غیر آویزان و $uu',vv'\in E(G)$. در این‌صورت $uu',vv'\in C$.

گیرید چنین نباشد و فرض کنید $uu'\notin C$ (حالت $vv'\notin C$ مشابه است). چون $e\in C$ لذا $f(uu')=f(vv')=۱$. فرض کنید $d(u')=۱$ و G' از $G-\{e,uu'\}$ با افزودن یال آویزان $vv_۱$ و یک

مولفه‌ی جدید $u_\circ v_\circ$ به‌وجود آمده باشد. نگاشت $g: E(G') \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید: $g(vv_۱) = -۱$، $g(u_\circ v_\circ) = +۱$ و برای هر $x \in E(G) - \{e, uu'\}$، $g(x) = f(x)$. واضح است که g یک $SEkSDF$ روی G' با $w(g') = w(f)$ و $\lambda(G') + |T(G')| > \lambda(G) + |T(G)|$ می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین $d(u') \geq ۲$.

ابتدا فرض کنید $u' = v'$. چون $uu' \notin C$، داریم که $vv' \notin C$. فرض کنید که یک یال آویزان $u'z$ در u' وجود دارد که مقدار -۱ گرفته است. بنابر ادعای (۱)، $u'z \in C$، که ایجاب می‌کند $f(u') \geq ۱$. فرض کنید G' از $G - \{e\}$ با افزودن مولفه‌ی جدید $u_\circ v_\circ$ به‌دست آمده باشد. نگاشت $g: E(G') \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم: $g(u_\circ v_\circ) = -۱$ و برای هر $x \in E(G) - \{e\}$، $g(x) = f(x)$. به‌وضوح، g یک $SEkSDF$ روی G' با $w(g') = w(f)$ و $\lambda(G') + |T(G')| > \lambda(G) + |T(G)|$ است که یک تناقض می‌باشد. بنابراین هیچ یال آویزانی در $u' = v'$ با مقدار -۱ وجود ندارد. اگر یک یال غیر آویزان با مقدار -۱ در u' باشد آن‌گاه ادعای (۲) نتیجه می‌دهد $d(u') = ۲$ که یک تناقض است. لذا هر یال در u' مقدار $+۱$ می‌گیرد. این تضمین می‌کند که $uu' \in C$، که غیرممکن است. حال فرض کنید $u' \neq v'$. چون فرض کرده‌ایم $uu' \notin C$ نتیجه می‌گیریم که $f(u') \leq ۱$. اگر یال آویزان $u'w$ در u' با مقدار -۱ وجود داشته باشد، آن‌گاه از ادعای (۱) داریم $u'w \in C$ و لذا $f(u') = f(N[u'w]) \geq ۱$. اگر یک یال غیر آویزان در u' با مقدار -۱ باشد آن‌گاه از ادعای (۲)، $d(u') = ۲$ و لذا $f(u') = \circ$. این نتیجه می‌دهد که $f(u') = \circ, ۱$.

اگر $f(u') = ۱$، آن‌گاه گراف G' را که از $G - \{e\}$ با افزودن مولفه‌ی جدید $u_\circ v_\circ$ به‌دست آمده است در نظر بگیرید. در این‌صورت به‌راحتی دیده می‌شود که تابع $g: E(G') \to \{-۱, ۱\}$ با ضابطه‌ی $g(u_\circ v_\circ) = -۱$ و برای هر $x \in E(G) - \{e\}$، $g(x) = f(x)$، یک $SEkSDF$ روی G' با $w(g') = w(f)$ و $\lambda(G') + |T(G')| > \lambda(G) + |T(G)|$ است که یک تناقض می‌باشد. بنابراین $f(u') = \circ$ و این ایجاب می‌کند که یک یال $u'u''$ در u' با وزن -۱ وجود دارد. اگر $d(u'') = ۱$ آن‌گاه فرض کنید G' از $G - \{u'u''\}$ با افزودن مولفه‌ی جدید $u_\circ v_\circ$ ایجاد شده باشد. در این‌صورت $g: E(G') \to \{-۱, ۱\}$ با ضابطه‌ی $g(u_\circ v_\circ) = -۱$ و برای هر $x \in E(G) - \{u'u''\}$، $g(x) = f(x)$، یک $SEkSDF$ روی G' با $w(g') = w(f)$ و $\lambda(G') + |T(G')| > \lambda(G) + |T(G)|$

می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین ۲ $d(u'') =$ (ادعای (۲) را ببینید). فرض کنید G' از گراف $G - \{e, uu', u'u''\}$ با افزودن مولفه‌ی جدید $u_\circ v_\circ$ و دو یال جدید $u''z$ و zv به‌دست آمده باشد. نگاشت $g : E(G') \to \{-۱, ۱\}$ که با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است $g(u_\circ v_\circ) = -۱$، $g(u''z) = -۱$، $g(zv) = ۱$ و برای هر $x \in E(G) - \{e, uu', u'u''\}$، $g(x) = f(x)$، به‌وضوح یک $SEkSDF$ روی G' با $w(g') = w(f)$ و $\lambda(G') + |T(G')| > \lambda(G) + |T(G)|$ است که تناقض است. بنابراین $uu' \in C$، که غیرممکن است.

ادعای ۴: $E(H) \cap P \subseteq C$.

فرض کنید $e = uv \in E(H) \cap P$. اگر یال غیر آویزان در u یا در v با مقدار ۱− موجود باشد آن‌گاه از ادعای (۳) داریم $e \in C$. پس u و v فقط می‌توانند یال آویزان با مقدار ۱− داشته باشند. اگر فقط u یالی آویزانی چون e با $f(e) = -۱$ داشته باشد آن‌گاه چون e در C قرار دارد، $f(u) \geq ۱$ و چون v هیچ یالی با مقدار ۱− ندارد $f(v) \geq ۱$ و در نتیجه $f(N[uv]) \geq ۱$ یعنی، $e \in C$. اگر هر دوی u و v یال آویزان با مقدار ۱− داشته باشند آن‌گاه $f(u) \geq ۱$ و $f(v) \geq ۱$ در نتیجه $e \in C$. پر واضح است که وقتی هیچ کدام از u و v شامل چنین یالی نباشند $e \in C$.

اگر H مولفه‌ای از G با اندازه‌ی حداقل ۲ باشد آن‌گاه از ادعای (۱) و (۴)، $E(H) \subseteq C$ لذا برای هر مولفه از G چون G_i یا $E(G_i) \subseteq C$ یا $E(G_i) \cap C = \emptyset$. فرض کنید $G_۱, \dots, G_s$ مولفه‌های همبندی G باشند که $E(G_i) \subseteq C$. در این‌صورت برای هر $۱ \leq i \leq s$، $f|_{G_i}$ یک $\gamma'_s(G_i) -$ تابع است. هم‌چنین $C \cap [\bigcup_{i=s+۱}^{\lambda(G)} E(G_i)] = \emptyset$. فرض کنید برای هر $۱ \leq i \leq \lambda(G)$، $|E(G_i)| = m_i$. در این‌صورت $|C| = \sum_{i=۱}^{s} m_i \geq k$ و $\sum_{i=s+۱}^{\lambda(G)} m_i \leq m - k$.

حال از قضیه‌ی ۵.۱.۵ داریم که

$$\begin{aligned}\gamma'_{ks}(G) &= \sum_{i=1}^{s}\gamma'_s(G_i)-\sum_{i=s+1}^{\lambda(G)}m_i\\ &\geq \sum_{i=1}^{s}\Psi(m_i)-\sum_{i=s+1}^{\lambda(G)}m_i\\ &\geq \Psi(\sum_{i=1}^{s}m_i)-\sum_{i=s+1}^{\lambda(G)}m_i\\ &\geq \Psi(k)-(m-k).\end{aligned}$$

برای اثبات دقیق بودن این کران، فرض کنید H_1 گرافی از اندازه‌ی k با $\gamma'_s(H_1)=\Psi(k)$ و H_2 گرافی از اندازه‌ی $m-k$ باشد که $V(H_1)\cap V(H_2)=\emptyset$. فرض کنید $G=H_1\cup H_2$ و f یک $\gamma'_s(H_1)-$ تابع باشد. نگاشت $g:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید: برای هر $e\in E(H_1)$، $g(e)=f(e)$ و برای هر $e\in E(H_2)$، $g(e)=-1$. در این‌صورت g یک $SEkSDF$ روی G با $w(g)=\Psi(k)-(m-k)$ است. ■

قضیه ۲.۴.۵ فرض کنید G گراف ساده‌ی بدون راس منفرد از اندازه‌ی m، مینیمم درجه‌ی δ و ماکزیمم درجه‌ی Δ باشد. در این‌صورت $\gamma'_{ks}(G)\geq\frac{2k\delta}{2\Delta-1}-m$.

برهان. فرض کنید $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ دنباله‌ی درجات G باشند که $d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$ و فرض کنید g یک $\gamma'_{ks}(G)-$ تابع روی G باشد. فرض کنید برای k یال متمایز e در $\{e_{j1}=u_{j1}v_{j1},\ldots,e_{jk}=u_{jk}v_{jk}\}$، $g(e)\geq 1$. نگاشت $f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید: برای هر $e\in E(G)$، $f(e)=\frac{g(e)+1}{2}$. پس داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}f(N_G[e_{j_i}]) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{g(N_G[e_{j_i}])+d(u_{j_i})+d(v_{j_i})-1}{2}\\ &\geq \sum_{i=1}^{k}\frac{d(u_{j_i})+d(v_{j_i})}{2}\\ &\geq k\delta.\end{aligned}\tag{1}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}f(N_G[e_{j_i}]) &\leq \sum_{e\in E(G)}f(N_G[e])=\sum_{e=uv\in E(G)}(d(u)+d(v)-1)f(e)\\ &\leq \sum_{e\in E(G)}(2\Delta-1)f(e)\\ &=(2\Delta-1)f(E(G)).\end{aligned}\tag{2}$$

از (۱) و (۲)، $f(E(G)) \geq \frac{k\delta}{2\Delta-1}$. چون $g(E(G)) = 2f(E(G)) - m$ نتیجه می‌شود که

$$\gamma'_{ks}(G) = g(E(G)) \geq \frac{2k\delta}{2\Delta - 1} - m\ .$$

■

نتیجه ۱.۴.۵ برای هر گراف $r-$ منتظم $(r \geq 1)$ G از اندازه‌ی m، $\gamma'_{ks}(G) \geq \frac{2rk}{2r-1} - m$. به‌علاوه، این کران برای $r = 1$ دقیق است.

قضیه ۳.۴.۵ اگر T درختی از اندازه‌ی $m \geq 2$ و k یک عدد صحیح باشد که $1 \leq k \leq m-1$، آن‌گاه

$$\gamma'_{ks}(T) \geq \begin{cases} k-m+2 & \text{زوج باشد } k \\ k-m+3 & \text{فرد باشد } k \end{cases}.$$

به‌علاوه، این کران به ازای هر مقدار از k دقیق است.

برهان. ابتدا با استقرا روی m، ثابت می‌کنیم که وقتی $1 \leq k \leq m-1$، $\gamma'_{ks}(T) \geq k-m+2$. حکم به‌وضوح برای درخت‌های از اندازه‌ی $m = 2, 3, 4$ درست است. فرض کنید T یک درخت دلخواه از اندازه‌ی $m \geq 5$ و حکم برای هر درخت با اندازه‌ی کوچک‌تر درست باشد. فرض کنید f یک $\gamma'_{ks}(T)-$ تابع است. اگر $M = \emptyset$، آن‌گاه درستی حکم واضح است. پس فرض کنید $M \neq \emptyset$.

حالت ۱: یک یال غیر آویزان $e = uv \in E(T)$ وجود دارد که $f(e) = -1$.

فرض کنید T_1 و T_2 مولفه‌های همبندی $T - \{e\}$ با $u \in T_1$ باشند. بنابراین $\gamma'_{ks}(T) = f(E(T_1)) - 1 + f(E(T_2))$. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

زیرحالت ۱.۱: برای $i = 1, 2$، $C_f \cap E(T_i) \neq \emptyset$. فرض کنید $|C_f \cap E(T_1)| = k_1$ و $|C_f \cap E(T_2)| = k_2$. در این‌صورت برای $i = 1, 2$، تابع f تحدیدش به T_i، یک SEk_iSDF

برای T_i است. بنابراین برای $i=۱,۲$، $\gamma'_{ks}(T_i)\leq f(E(T_i))$. ابتدا فرض کنید برای $i=۱,۲$، $E(T_i)\subseteq C_f$. در این‌صورت چون $k\leq m-۱$، نتیجه می‌دهد که $e\notin C_f$ و از قضیه‌ی ۱.۱.۵، $\gamma'_{ks}(T)=f(E(T))=f(E(T_۱))-۱+f(E(T_۲))\geq ۱-۱+۱\geq k-m+۲$. حال بدون خلل به کلیت فرض می‌کنیم $E(T_۱)\nsubseteq C_f$. اگر $E(T_۲)\subseteq C_f$، آن‌گاه از فرض استقرا و قضیه‌ی ۱.۱.۵، $\gamma'_{k_۱s}(T_۱)\geq k_۱-|E(T_۱)|+۲$ و $\gamma'_{k_۲s}(T_۲)\geq ۱$. اگر $e\notin C_f$، آن‌گاه به‌وضوح $\gamma'_{ks}(T)\geq k-m+۳$. اگر $e\in C_f$، آن‌گاه

$$\gamma'_{ks}(T)=f(E(T))=f(E(T_۱))-۱+f(E(T_۲))\geq K_۱-|E(T_۱)|+۲-۱+۱\geq k-m+۲.$$

حالت $E(T_۲)\nsubseteq C_f$ به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

حالتی که $E(T_۱)\nsubseteq C_f$ و $E(T_۲)\nsubseteq C_f$ راحت است.

زیرحالت ۲.۱: $C_f\cap E(T_۱)=\emptyset$ (حالت $C_f\cap E(T_۲)=\emptyset$ مشابه است). ابتدا فرض کنید $e\notin C_f$. در این‌صورت $|C\cap E(T_۲)|=k_۲\geq k$. ادعا می‌کنیم که برای هر یال $e\in T_۱$، $f(e)=-۱$. هرگاه $E(T_۱)\cap P\neq\emptyset$، نگاشت $g:E(T)\to\{-۱,۱\}$ را باضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید. برای هر $e\in E(T_۱)$، $g(e)=-۱$ و برای هر $e\in E(T)-E(T_۱)$، $g(e)=f(e)$. واضح است که g یک $SEkSDF$ از T با وزن کمتر از $w(f)$ می‌باشد که یک تناقض است. این ادعای ما را ثابت می‌کند. حال از فرض استقرا روی $T'=T_۲\cup\{uv\}$ داریم

$$\gamma'_{ks}(T)=f(E(T_۱))+f(E(T'))\geq -|E(T_۱)|+k_۲-|E(T')|+۲\geq k-m+۲.$$

حال فرض کنید $e\in C_f$. ابتدا فرض کنید $f(v)\geq ۲$. در این‌صورت $f|_{T'}$ یک $SEkSDF$ روی T' است. اگر $k=|E(T')|$، آن‌گاه چون $f(v)\geq ۲$، از قضیه‌ی ۱.۱.۵ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\gamma'_{ks}(T)\geq f(E(T'))-|E(T_۱)| &\geq \gamma'_s(T')-|E(T_۱)|\geq ۲-|E(T')|\\ &=(k-|E(T')|)+۲-|E(T_۱)|=k-m+۲.\end{aligned}$$

اگر $k<|E(T')|$، از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$\gamma'_{ks}(T)\geq f(E(T'))-|E(T_۱)|\geq k-|E(T')|+۲-|E(T_۱)|=k-m+۲.$$

حال فرض کنیم که $f(v)=1$. در این‌صورت $f|_{T'}$ یک $SEkSDF$ روی T' است و یال $uv'=e'\in T_1$ وجود دارد که $f(e')=+1$ (توجه کنید که $e\in C_f$). از قضیه‌ی ۱.۱.۵ و فرض استقرا خواهیم داشت

$$\gamma'_{ks}(T)\geq f(E(T'))-|E(T_1)|+2\geq (k-|E(T')|+1)-|E(T_1)|+2=k-m+3.$$

در نهایت، فرض کنید $f(v)\leq 0$. در این‌صورت یا یالی در v وجود دارد که در C_f نیست یا راس $w\in V(T_2)$ مخالف v وجود دارد که $f(w)\geq 2$. چون $e\in C_f$، $f(u)\geq -f(v)$. لذا در T_1 حداقل $-f(v)+1$ یال e وجود دارد که $f(e)=+1$. فرض کنید $E(v)\cap M=\{uv,vv_1,\ldots,vv_s\}$ و $E(u)\cap P=\{uu_1,uu_2,\ldots,uu_r\}$، که در آن $r\geq s+1$. نگاشت $g:E(T)\to\{-1,1\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید: برای $i=1,\ldots,s$، $g(uv)=g(vv_i)=1$ و $g(uu_{s+1})=g(uu_i)=-1$ و برای هر $e\in E(T)-\{uu_{s+1},uv,vv_i,uu_i:1\leq k\leq s\}$، $g(e)=f(e)$. در این‌صورت g یک $\gamma_{ks}(T)-$ تابع است که $g(v)\geq 1$. حال با بحث مشابهی که در بالا ارایه شد (برای حالت‌های $f(v)\geq 2$ و $f(v)=1$) نتیجه می‌شود که

$$\gamma'_{ks}(T)=g(E(T))\geq k-m+2$$

حالت ۲: تنها یال‌های e که $f(e)=-1$، یال‌های آویزان هستند.

ابتدا فرض کنید که یک یال آویزان $e=uv\in M\cap C_f^c$ وجود دارد که $d(u)=1$. در این‌صورت $f|_{T-\{u\}}$ یک $SEkSDF$ برای $T-\{u\}$ است. اگر $k\leq m-2$، آن‌گاه از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$\gamma'_{ks}(T)=f(E(T-\{u\}))-1\geq k-(m-1)+2-1=k-m+2.$$

هرگاه $k=m-1$، در این صورت راس $w\in V(T)-\{u,v\}$ وجود دارد که $f(w)\geq 2$. حال نتیجه از قضیه‌ی ۱.۱.۵ به دست می‌آید لذا می‌توانیم فرض کنیم $M\subseteq C_f$. این نتیجه می‌دهد که برای هر راس غیر برگ $v\in V(T)$، $f(v)\geq 1$. بنابراین f یک $SEDF$ روی T می‌باشد و نتیجه از قضیه‌ی ۱.۱.۵ برقرار است.

اگر k فرد باشد، واضح است که $۲|P| \neq k + ۲$ و لذا $\gamma'_{ks}(T) = ۲|P| - m \neq k - m + ۲$. از این‌رو $\gamma'_{ks}(T) \geq k - m + ۳$.

برای اثبات دقیق بودن، فرض کنید T درختی باشد که از ستاره‌ی $K_{۱,k+۱}$ با مجموعه‌ی راس‌های $\{v, v_۱, \ldots, v_{k+۱}\}$ و مجموعه‌ی یال‌های $\{vv_i : ۱ \leq i \leq k+۱\}$، با افزودن $m - k - ۱$ یال آویزان $v_۱u_۱, \ldots, v_۱u_{m-k-۱}$ به‌وجود آمده باشد. واضح است که برای k های زوج، $\gamma'_{ks}(T) = k - m + ۲$ و برای k های فرد، $\gamma'_{ks}(T) = k - m + ۳$. این برهان را تمام می‌کند. ■

قضیه ۴.۴.۵ فرض کنید G یک گراف ساده و همبند از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ و اندازه‌ی m، و k عدد صحیح و مثبتی باشد که $۱ \leq k \leq m - ۱$. در این‌صورت $\gamma'_{ks}(G) \geq n + k + ۱ - ۲m$. به‌علاوه، این کران برای هر $k \geq ۷$ فرد دقیق است.

برهان. اثبات به استقرا روی m است. حکم به‌وضوح برای $m = ۲, ۳$ درست است. فرض کنید $m \geq ۴$ و حکم برای تمامی گراف‌های ساده و همبند با اندازه‌ی کمتر از m درست باشد. فرض کنید G یک گراف ساده از اندازه‌ی m بوده و f یک $\gamma'_{ks}(G)$ − تابع باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: یال غیر آویزان $e = uv \in E(G)$ وجود دارد که $f(e) = -۱$.
ابتدا فرض کنید e یک **پل** نباشد. اگر $e \notin C_f$، آن‌گاه f یک $SEkSDF$ روی $G - e$ است. اگر $k \leq m - ۲$، آن‌گاه از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$\gamma'_{ks}(G) = f(E(G-e)) - ۱ \geq n + k + ۱ - ۲(m-۱) - ۱ = n + k + ۲ - ۲m.$$

برای $k = m - ۱$، واضح است که f یک $SEDF$ برای $G - e$ است و از قضیه‌ی ۲.۱.۵ نتیجه می‌شود

$$\gamma'_{ks}(G) = f(E(G-e)) - ۱ \geq n - (m-۱) - ۱ = n - m = n + k + ۱ - ۲m.$$

فرض کنید $e \in C_f$. اگر $f|_{G-e}$ یک $SEDF$ از $G-e$ باشد، نتیجه همانند بالا برقرار است. در غیر این‌صورت $f|_{G-e}$ یک $SE(k-۱)SDF$ از $G-e$ است و نتیجه از فرض استقرا برقرار خواهد بود.
فرض کنید e یک پل و $G_۱$ و $G_۲$ مولفه‌های همبندی $G-e$ باشند. بحث مشابهی که در اثبات حالت اول قضیه‌ی ۳.۴.۵ به کار رفت نشان می‌دهد $\gamma'_{ks}(G) \geq n+k+۱-۲m$. توجه کنید برای این حالت از قضیه‌ی ۳.۱.۵ به جای قضیه‌ی ۱.۱.۵ استفاده می‌کنیم.

حالت ۲: تنها یال‌های e که $f(e)=-۱$، یال‌های آویزان هستند.

ابتدا فرض کنید که یال آویزان $e=uv \in M \cap C_f^c$ با $d(u)=۱$ وجود دارد. در این‌صورت نتیجه از بحث مشابهی که برای اثبات حالت ۲ در قضیه‌ی ۳.۴.۵ بیان شد و هم‌چنین قضیه‌ی ۳.۱.۵ حاصل می‌شود. حال فرض کنید $M \subseteq C_f$. اگر G یک درخت باشد، حکم از قضیه‌ی ۳.۴.۵ برقرار است. حال فرض کنید G یک دور مانند D داشته باشد. بنابر فرض برای هر $e \in E(D)$، $f(e)=۱$. ابتدا فرض کنید برای هر یال e' که یک سرش در $V(D)$ است، $f(e')=۱$. آن‌گاه برای هر $e \in E(D)$، $f|_{G-e}$ یک $SE(k-۱)SDF$ روی $G-e$ است و در نتیجه

$$f(E(G)) = f|_{G-e}(E(G-e)) + ۱ \geq n + (k-۱) + ۱ - ۲(m-۱) + ۱ = n+k-۲m+۳.$$

حال فرض کنید یال $e'=uu'$ با $f(e')=-۱$ و $u \in V(D)$ وجود داشته باشد. بنابراین طبق فرض، e' یک یال آویزان است. فرض کنید $e=uv \in E(D)$. هرگاه برای هر یال e'' در v، $f(e'')=۱$، در این‌صورت f تحدیدش به $G_۱ = G-\{e,e'\}$ یک $SE(k-۲)SDF$ روی $G_۱$ است و در نتیجه

$$f(E(G)) = f|_{G_۱}(E(G_۱)) \geq (n-۱) + (k-۲) + ۱ - ۲(m-۲) \geq n+k+۲-۲m.$$

بالاخره، فرض کنید یال e'' در v با $f(e'')=-۱$ وجود داشته باشد. توجه کنید که بنابر فرض، e'' یک یال آویزان است. بنابراین، تحدید f به $G_۲ = G-\{e,e',e''\}$ یک $SE(k-۳)SDF$ روی $G_۲$ است و در نتیجه

$$f(E(G)) = f|_{G_۲}(E(G_۲)) \geq (n-۲) + (k-۳) + ۱ - ۲(m-۳) - ۱ \geq n+k+۱-۲m.$$

این درستی کران را ثابت می‌کند.

برای اثبات دقیق بودن دو حالت در نظر می‌گیریم.

آ: $k \geq ۷$ فرد است و $k = m - ۱$. فرض کنید G از ستاره‌ی $K_{۱,k-۳}$ با مجموعه‌ی راس‌های $\{v, v_۱, \ldots, v_{k-۳}\}$ و مجموعه یال‌های $\{vv_i : ۱ \leq i \leq k-۳\}$، با افزودن یال‌های $v_۱v'_۱, v_۲v'_۲, v_۳v'_۳$ و یال $v_۱v_۲$ به‌وجود آمده باشد. نگاشت $f : V(G) \to \{-۱, ۱\}$ با ضابطه‌ی $f(v_۱v_۲) = ۱$، و برای هر $۱ \leq i \leq \frac{k-۱}{۲}$، $f(vv_i) = ۱$ و در غیر این‌صورت $f(e) = -۱$، یک $SEkSDF$ روی G با $w(f) = n + k + ۱ - ۲m$ است.

ب: $k \geq ۷$ فرد است و $k \leq m - ۲$. فرض کنید G از ستاره‌ی $K_{۱,k-۳}$ با مجموعه‌ی راس‌های $\{v, v_۱, \ldots, v_{k-۲}\}$ و مجموعه یال‌های $\{vv_i : ۱ \leq i \leq k-۲\}$، با افزودن یال‌های $v_۱v'_۱, v_۲v'_۲, v_۳v^j_۳$ $(j = ۱, ۲, \ldots, m-k-۱)$ و یال $v_۱v_۲$ به‌وجود آمده باشد. نگاشت $f : V(G) \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید: $f(v_۱v_۲) = ۱$، و برای هر $۱ \leq i \leq \frac{k-۱}{۲}$، $f(vv_i) = ۱$ و در غیر این‌صورت $f(e) = -۱$. واضح است که f یک $SEkSDF$ روی G با وزن $n + k + ۱ - ۲m$ است. این اثبات را کامل می‌کند. ■

فصل ۶

k — زیراحاطه‌ی ستاره‌ی علامت‌دار

مقدمه

تابع $f : E(G) \to \{-۱, ۱\}$ را یک **تابع k — زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار** ($SSkSDF$) برای G گوییم هرگاه k تا از راس‌های G توسط f پوشانده شوند، به عبارت دیگر برای حداقل k راس v از G، $\sum_{e\in E(v)} f(e) \geq ۱$. در بین تمامی چنین توابعی، آنهایی که کمترین وزن را دارند **تابع k — زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار مینیمال** یا $\gamma^k_{ss}(G)$ — **تابع** نامیده می‌شوند. وزن تابع k — زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار مینیمال را **عدد k — زیراحاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار** نامیده و با $\gamma^k_{ss}(G)$ نشان می‌دهیم. برای هر تابع $SSkSDF$، P_f و M_f همانند فصل قبل تعریف می‌شوند.

هم‌چنین تعریف می‌کنیم $V^+_f = \{v \in V(G) | f(E(v)) \geq ۱\}$ و $V^-_f = \{v \in V(G) | f(E(v)) < ۱\}$ و برای هر راسی چون v منظور از $f(v)$ همان $f(E(v))$ خواهد بود.

۱.۶ قضایا و نتایج پیش‌نیاز

قضیه ۱.۱.۶ [۱۹] برای هر گراف G و هر $v \in V(G)$، $\gamma'_{ss}(G) \leq \gamma'_{ss}(G-v) + d_G(v)$.

قضیه ۲.۱.۶ [۱۹] برای هر گراف G از مرتبه‌ی $n \geq ۴$، $\gamma'_{ss}(G) \leq ۲n - ۴$.

قضیه ۳.۱.۶ [۱۹] برای هر گراف G از مرتبه‌ی n با $\delta(G) \geq ۱$، $\gamma'_{ss}(G) \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil$.

قضیه ۴.۱.۶ [۱۵] ۱: برای هر عدد صحیح $n \geq ۳$، $\gamma'_{ss}(C_n) = n$،
۲: برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، $\gamma'_{ss}(P_n) = n - ۱$.

قضیه ۵.۱.۶ [۱۷] هر گراف G با $\delta(G) \geq ۳$، دارای یک دور زوج است.

۲.۶ عدد k − زیراحاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار برای مسیرها و دورها

گزاره ۱.۲.۶ ۱: برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، اگر $k \leq n - ۱$، آن‌گاه $\gamma^k_{ss}(P_n) = ۲k - n + ۱$.
۲: برای هر عدد صحیح $n \geq ۳$، اگر $k \leq n - ۱$، آن‌گاه $\gamma^k_{ss}(C_n) = ۲k - n + ۲$.

برهان. ۱: فرض کنید $P_n = v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ و f یک $\gamma^k_{ss}(P_n)$ − تابع باشد. چون برای هر $v \in V(P_n)$، $d(v) \leq ۲$ لذا برای هر $v \in C_f$، $E(v) \subseteq P$. به‌وضوح، $|\bigcup_{v \in V^+} E(v)| \geq |V^+|$ که نتیجه می‌دهد $|P| \geq |V^+| \geq k$. بنابراین $\gamma^k_{ss}(P_n) = |P| - |M| \geq k - (n - k - ۱) = ۲k - n + ۱$.
حال نگاشت $g : E(G) \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید: برای هر $۱ \leq i \leq k$، $g(v_i v_{i+۱}) = ۱$ و برای هر $i \geq k + ۱$، $g(v_i v_{i+۱}) = -۱$. واضح است که g یک $SSkSDF$ روی G با وزن $۲k - n + ۱$ است. بدین ترتیب $\gamma^k_{ss}(P_n) = ۲k - n + ۱$.
۲: اثبات مشابه قسمت (۱) است. ■

۳.۶ کران‌های پایین برای عدد k — زیراحاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار

اثبات لم زیر سرراست است و از بیان آن صرف‌نظر می‌کنیم.

لم ۱.۳.۶ فرض کنید G یک گراف بدون راس منفرد و از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ باشد. اگر $v \in V(G)$ از درجه‌ی $\delta(G)$ باشد آن‌گاه

$$\gamma_{ss}^{k}(G) \leq \gamma_{ss}^{k-۱}(G-v) + d(v)$$

قضیه ۱.۳.۶ برای هر گراف بدون راس منفرد G از مرتبه‌ی $n \geq ۴$، $\gamma_{ss}^{k}(G) \leq n + k - ۴$.

برهان. اثبات با استقرا روی $m = |E(G)|$ است. اگر $m = ۱, ۲$، درستی حکم واضح است. فرض کنید که حکم برای هر گراف از اندازه‌ی کمتر از m برقرار باشد. حال گراف دلخواه G از اندازه‌ی m را در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید $k = ۱$. گیرید v راسی از درجه‌ی $\delta(G)$ است و $N(v) = \{v_۱, \dots, v_{\delta(G)}\}$. نگاشت $f : E(G) \to \{-۱, ۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید: برای هر $۱ \leq i \leq \lceil \frac{\delta(G)+۱}{۲} \rceil$، $f(vv_i) = ۱$، و برای هر $i > \lceil \frac{\delta(G)+۱}{۲} \rceil$، $f(vv_i) = -۱$ و برای هر $e \in E(G) - \{vv_i : ۱ \leq i \leq \delta(G)\}$، $f(e) = -۱$. واضح است که f یک $SSkSDF$ روی G بوده و $\gamma_{ss}^{k}(G) \leq f(E(G)) \leq n + k - ۴$. فرض کنید $k \geq ۲$. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: $\delta(G) \leq ۲$. اگر v راسی از درجه‌ی $\delta(G)$ باشد آن‌گاه $G - v$ اندازه‌ی کوچک‌تر از m دارد. از فرض استقرا و از لم ۱.۳.۶ نتیجه می‌شود

$$\gamma_{ss}^{k}(G) \leq \gamma_{ss}^{k-۱}(G-v) + d(v) \leq (n-۱) + (k-۱) - ۴ + ۲ = n + k - ۴.$$

حالت ۲: $\delta(G) \geq ۳$. بنابر قضیه‌ی ۵.۱.۶، G یک دور زوج مانند $C = (v_۱, v_۲, \dots, v_r)$ دارد. گیرید $H = G - E(C)$. بنابر فرض استقرا H یک $SSkSDF$ چون f دارد که $f(E(H)) \leq n+k-۴$.

نگاشت $g: E(G) \rightarrow \{-۱,۱\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید: برای هر i $(۱ \leq i \leq r)$، $g(v_iv_{i+۱}) = (-۱)^i$ که در آن $v_{r+۱} = v_۱$ و برای هر $e \in E(G) - E(C)$، $g(e) = f(e)$. واضح است که g یک $SSkSDF$ روی G می‌باشد به‌طوری‌که $g(E(G)) = f(E(H)) \leq n + k - ۴$ و این مطلوب ماست. ■

قضیه ۲.۳.۶ برای هر گراف بدون راس منفرد G از مرتبه‌ی $n \geq ۲$ داریم

$$\gamma_{ss}^k(G) \geq \frac{(\Delta(G)+۱)k - n\Delta(G)}{۲}.$$

برهان. فرض کنید f یک $\gamma_{ss}^k(G)$ — تابع باشد. برای هر $e = uv \in E(G)$ داریم $e \in E(u)$ و $e \in E(v)$. بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma_{ss}^k(G) &= \textstyle\sum_{e\in E(G)} f(e) = \frac{۱}{۲}\sum_{v\in V(G)}\sum_{e\in E(v)} f(e)\\ &= \textstyle\frac{۱}{۲}\sum_{v\in V^+}\sum_{e\in E(v)} f(e) + \frac{۱}{۲}\sum_{v\in V^-}\sum_{e\in E(v)} f(e)\\ &\geq \textstyle\frac{k}{۲} - \frac{(n-k)\Delta(G)}{۲} = \frac{(\Delta(G)+۱)k - n\Delta(G)}{۲}.\end{aligned}$$

■

قضیه ۳.۳.۶ فرض کنید G یک گراف بدون راس منفرد از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m و با دنباله‌ی درجات $(d_۱,\ldots,d_n)$ باشد که در آن $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_n$. در این‌صورت $\gamma_{ss}^k(G) \geq \frac{\sum_{j=۱}^k (d_j + d_j^۲)}{۲d_n} - m$.

برهان. فرض کنید g یک $\gamma_{ss}^k(G)$ — تابع باشد و فرض کنید برای k راس متمایز v در $\{v_{j_۱},\ldots,v_{j_k}\}$، $g(v) \geq ۱$. تابع $f: E(G) \rightarrow \{۰,۱\}$ را برای هر $e \in E(G)$ با ضابطه‌ی $f(e) = \frac{g(e)+۱}{۲}$ تعریف کنید. پس داریم

$$\sum_{e\in E(G)} f(N_G[e]) = \sum_{e=uv\in E(G)} \frac{g(N_G[e]) + d(u) + d(v) - ۱}{۲}.$$

چون $\sum_{v\in V} g(E(v))d(v) = \sum_{e\in E(G)}(g(N_G[e])+g(e))$ و $\sum_{v\in V} d(v)^{۲} = \sum_{e=uv\in E(G)}(d(u)+d(v))$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E(G)} f(N_G[e]) &= \tfrac{۱}{۲}\sum_{v\in V}(g(E(v))d(v)+d(v)^{۲}) - \tfrac{۱}{۲}\sum_{e\in E(G)} g(e) - \tfrac{m}{۲}\\ &\geq \tfrac{۱}{۲}\sum_{v\in(V-\{v_{j_۱},\ldots,v_{j_k}\})}(g(E(v))d(v)+d(v)^{۲}) +\\ &\quad \tfrac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{k}(d_{j_i}+d_{j_i}^{۲}) - \tfrac{۱}{۲}\gamma_{ss}^{k}(G) - \tfrac{m}{۲}\\ &\geq \tfrac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{k}(d_j+d_j^{۲}) - \tfrac{۱}{۲}\gamma_{ss}^{k}(G) - \tfrac{m}{۲}. \qquad (۱)\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E(G)} f(N_G[e]) &= \sum_{v\in V} f(E(v))d(v) - \sum_{e\in E(G)} f(e)\\ &\leq \sum_{v\in V} f(E(v))d_n - \sum_{e\in E(G)} f(e)\\ &= d_n(۲\sum_{e\in E(G)} f(e)) - \sum_{e\in E(G)} f(e)\\ &= (۲d_n - ۱)\sum_{e\in E(G)} f(e). \qquad (۲)\end{aligned}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\sum_{e\in E(G)} f(e) \geq \frac{\frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{k}(d_j+d_j^{۲}) - \frac{۱}{۲}\gamma_{ss}^{k}(G) - \frac{m}{۲}}{۲d_n - ۱}.$$

چون $g(E(G)) = ۲f(E(G)) - m$، داریم که

$$\gamma_{ss}^{k}(G) = \sum_{e\in E(G)} g(e) \geq \frac{۱}{۲d_n - ۱}(\sum_{j=۱}^{k}(d_j+d_j^{۲}) - \gamma_{ss}^{k}(G) - m) - m\ .$$

بنابراین

$$\gamma_{ss}^{k}(G) \geq \frac{\sum_{j=۱}^{k}(d_j+d_j^{۲})}{۲d_n} - m,$$

و برهان تمام است. ■

نتیجه ۱.۳.۶ برای هر گراف $r-$ منتظم G از اندازه‌ی m، $\gamma_{ss}^{k}(G) \geq \frac{k(r+۱)}{۲} - m$.

قضیه ۴.۳.۶ فرض کنید G گرافی بدون راس منفرد از مرتبه‌ی $n \geq ۲$، اندازه‌ی m، مینیمم درجه‌ی δ و ماکزیمم درجه‌ی Δ باشد. در این‌صورت

$$\gamma_{ss}^{k}(G) \geq (m+k) - \frac{(۲m+n)\Delta + (n-k)\Delta^{۲}}{۲\delta}\ .$$

برهان. فرض کنید f یک تابع $\gamma_{ss}^k(G)$ باشد. داریم که

$$\begin{aligned}
(2\delta-1)|M| &\le \sum_{e\in M}|N_G[e]| = \sum_{e=uv\in M} d(u)+d(v)-1\\
&= -|M| + \sum_{e=uv\in M} d(u)+d(v)\\
&= -|M| + \sum_{v\in V(G[M])} |M\cap E(v)|d(v)\\
&\le -|M| + \sum_{v\in V^+} |M\cap E(v)|d(v) + \sum_{v\in V^-} |M\cap E(v)|d(v)\\
&\le -|M| + \sum_{v\in V^+} (\lceil \tfrac{d(v)}{2}\rceil - 1)d(v) + \sum_{v\in V^-} d(v)^2\\
&\le -|M| + \sum_{v\in V^+} \lceil \tfrac{d(v)}{2}\rceil d(v) + \sum_{v\in V^-} d(v)^2 - \sum_{v\in V^+} d(v)\\
&\le -|M| + \sum_{v\in V^+} \lceil \tfrac{d(v)}{2}\rceil \Delta + 2\sum_{v\in V^-} \tfrac{d(v)}{2} d(v) - \sum_{v\in V^+} d(v)\\
&\le -|M| + \sum_{v\in V^+} \lceil \tfrac{d(v)}{2}\rceil \Delta + \sum_{v\in V^-} \lceil \tfrac{d(v)}{2}\rceil \Delta +\\
&\quad \sum_{v\in V^-} \tfrac{d(v)}{2} d(v) - \sum_{v\in V^+} d(v)\\
&\le -|M| + \sum_{v\in V} \lceil \tfrac{d(v)}{2}\rceil \Delta + \tfrac{\Delta^2}{2}|V^-| - \delta|V^+|\\
&\le -|M| + \Delta\sum_{v\in V} \tfrac{d(v)+1}{2} + \tfrac{\Delta^2}{2}(n-k) - \delta k\\
&= -|M| + \Delta(m+\tfrac{n}{2}) + \tfrac{\Delta^2}{2}n - k(\tfrac{\Delta^2}{2}+\delta).
\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که

$$|M| \le \frac{\Delta(m+\frac{n}{2}) + \frac{\Delta^2}{2}(n-k) - k\delta}{2\delta}\,.$$

حال حکم از رابطه‌ی $\gamma_{ss}^k(G) = m - 2|M|$ حاصل می‌شود. ■

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

اجتماع مجزا	Disjoint union
اصل لانه کبوتری	Peginhole principle
افراز هم‌سان	Equipartition
افراز هم‌سان قوی	Strong equipartition
الحاق	Join
اندازه	Size
بچه‌های یک راس	Childs of a vertex
برگ	Leaf
پل	Bridge
تابع علامت‌دار	Sined function
تابع $k-$ زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار	Signed star k-subdominating function
تابع $k-$ زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار مینیمم	Minimum signed star k - subdominating function
تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار	Signed k-subdominating function
تابع $k-$ زیراحاطه‌گر علامت‌دار مینیمم	Minimum signed k-subdominating function
تابع $k-$ زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار	Signed edge k-subdominating function
تابع $k-$ زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمم	Minimum signed edge k-subdominating function

تابع احاطه‌گر	Dominating function
تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار	Signed strict majority dominating function
تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار مینیمم	Minimum signed strict majority dominating function
تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار	Signed majority dominating function
تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار مینیمم	Minimum signed majority dominating function
تابع احاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار	Signed star dominating function
تابع احاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار مینیمم	Minimum signed star dominating function
تابع احاطه‌گر علامت‌دار	Signed dominating function
تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمم	Minimum signed dominating function
تابع علامت‌دار خوب	Good signed function
جمع گراف‌ها	Sum of graphs
درخت	Tree
دنباله‌ی درجات	Degree sequence
راس اتکا	Support vertex
راس منفرد	Isolated vertex
زیرگراف	Subgraph
زیرگراف القایی	Induced subgraph
شعاع یک گراف	Radius of a graph
ضرب دکارتی	Cartesian product
عدد $k-$ زیراحاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار	Signed star k-subdomination number
عدد $k-$ زیراحاطه‌ای علامت‌دار	Signed k-subdomination number
عدد $k-$ زیراحاطه‌ای یالی علامت‌دار	Signed edge k-subdomination number
عدد احاطه‌ای	Domination number
عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار	Signed strict majority domination number

عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار	Signed majority domination number
عدد احاطه‌ی ستاره‌ی علامت‌دار	Signed star domination number
عدد احاطه‌ای علامت‌دار	Signed domination number
کران بالا	Upper bound
کران پایین	Lower bound
کران دقیق	Sharp bound
گراف —	– graph
— متمم	Complemen –
— ناهمبند	Disconnected –
— ستاره‌ی مضاعف	Double star –
— همبند	Connected –
— یالی	Line –
مجموعه‌ی احاطه‌گر	Dominating set
مرکز یک گراف	Center of a graph
مولفه‌ی همبندی	Connected component
نواده	Descendant
همسایگی	Neighbourhood
همسایگی بسته	Closed neighbourhood
همسایگی یالی	Edge neighbourhood
همسایگی یالی بسته	Closed edge neighbourhood
یال آویزان	Pendant edge

واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی

Bridge	پل
Cartesian product	ضرب دکارتی
Center of a graph	مرکز یک گراف
Childs of a vertex	بچه‌های یک راس
Closed edge neighbourhood	همسایگی یالی بسته
Complement graph	گراف متمم
Connected component	مولفه‌ی همبندی
Connected graph	گراف همبند
Degree sequence	دنباله‌ی درجات
Descendant	نواده
Disconnected graph	گراف ناهمبند
Disjoint union	اجتماع مجزا
Dominating function	تابع احاطه‌گر
Dominating set	مجموعه‌ی احاطه‌گر
Domination function	عدد احاطه‌ای
Double star graph	گراف ستاره‌ی مضاعف

Edge neighbourhood	همسایگی یالی
Equipartition	افراز هم‌سان
Good signed function	تابع علامت‌دار خوب
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Isolated vertex	راس منفرد
Join	الحاق
Leaf	برگ
Line graph	گراف یالی
Lower bound	کران پایین
Minimum dominating function	تابع احاطه‌گر مینیمم
Minimum signed dominating function	تابع احاطه‌گر علامت‌دار مینیمم
Minimum signed edge k-subdominating function	تابع k − زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار مینیمم
Minimum signed k-subdominating function	تابع k − زیراحاطه‌گر علامت‌دار مینیمم
Minimum signed star dominating function	تابع احاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار مینیمم
Minimum signed strict majority dominating function	تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار مینیمم
Neighbourhood	همسایگی
Peginhole principle	اصل لانه کبوتری
Pendant edge	یال آویزان
Radius of a graph	شعاع یک گراف
Sharp bound	کران دقیق
Signed dominating function	تابع احاطه‌گر علامت‌دار
Signed domination number	عدد احاطه‌ای علامت‌دار
Signed k-subdominating function	تابع k − زیراحاطه‌گر علامت‌دار
Signed edge k-subdominating function	تابع k − زیراحاطه‌گر یالی علامت‌دار

Signed edge k-subdomination number	عدد k − زیراحاطه‌ای یالی علامت‌دار
Sined function	تابع علامت‌دار
Signed k-subdomination number	عدد k − زیراحاطه‌ای علامت‌دار
Signed majority dominating function	تابع احاطه‌گر اکثریت علامت‌دار
Signed majority domination number	عدد احاطه‌ای اکثریت علامت‌دار
Signed star dominating function	تابع احاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار
Signed star domination number	عدد احاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار
Signed star k-subdominating function	تابع k − زیراحاطه‌گر ستاره‌ی علامت‌دار
Signed star k-subdomination number	عدد k − زیراحاطه‌ای ستاره‌ی علامت‌دار
Signed strict majority dominating function	تابع احاطه‌گر اکثریت اکید علامت‌دار
Signed strict majority domination number	عدد احاطه‌ای اکثریت اکید علامت‌دار
Size	اندازه
Strong equipartition	افراز هم‌سان قوی
Subgraph	زیرگراف
Sum of graphs	جمع گراف‌ها
Support vertex	راس اتکا
Tree	درخت
Upper bound	کران بالا

کتاب‌نامه

[1] L. Beineke and M. A. Henning, Opinion functions on trees, *Discrete Mathematics* **167** (1997), 167-178.

[2] Izak Broere, Johannes H. Hattingh, Michael A. Henning and Alice A. McRae, Majority domination in graphs, *Discrete Mathematics* **138** (1996), 125-135.

[3] Gerard J. Chang, Sheng-Chyang Liaw and Hong-Gwa Yeh, K-subdomination in graphs, *Discrete Applied Mathematics* **120** (2002), 55-60.

[4] E. J. Cockayne and C. M. Mynhardt, On a generalization of signed dominating functions of graphs, *Ars Combinatoria* **43** (1996), 235-245.

[5] J. E. Dunbar, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning and P. J. Slater, Signed domination in graphs, *Proc. 7th internat conf. in graph theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications*

[6] J. H. Hattingh, M. A. Henning and E. Ungerer, Partial signed domination in graphs, *Ars Combinatoria* **48** (1998), 33-42.

[7] Michael A. Henning, Domination in regular graphs, *Ars Combinatoria* **43** (1996), 263-271.

[8] Michael A. Henning and Hugh R.Hind, Strict majority functions on graphs, *J Graph Theory* **28** (1998), 49-56.

[9] Tara S. Holm, On majority domination in graphs, *Discrete Mathematics* **239** (2001), 1-12.

[10] Li-Ying Kang, Chuangyin Dang, Mao-Cheng Cai and Erfang Shan, Upper bounds for the k-subdomination number of graphs, *Discrete Mathematics* **247** (2002), 229-234.

[11] LiYing Kang, Hong Qiao,Erfang Shan and Dingzhu Du, Lower bounds on minus domination and k-subdomination numbers, *Theoretical Computer Science* **296** (2003), 89-98.

[12] H. Karami, A. Khodkar, S. M. Sheikholeslami, More on lower bounds for signed edge domination numbers in graphs, *Graphs and Combin.* **(to appear).**

[13] H. Karami, A. Khodkar, S. M. Sheikholeslami, Signed edge domination numbers in trees, *Ars Combin.* **(to appear).**

[14] H. Karami, A. Khodkar, S. M. Sheikholeslami, Signed edge majority domination numbers in graphs, *Australas. J. Combin.* **(to appear).**

[15] Changping Wang, The signed star domination numbers of the cartesian product graphs, *Discrete Applied Mathematics* **155** (2007), 1497-1505.

[16] D. B. West, Introduction to graph theory, *Prentice - Hall , Inc.* (1996).

[17] B. Xu, On edge domination numbers of graphs, *Discrete Mathematics* **294** (2005), 311-316.

[18] B. Xu, On lower bounds of signed edge domination numbers in graphs, *J. East China Jiaotong Univ.* **1** (2004), 110-114.

[19] B. Xu, Two classes of edge domination in graphs, *Discrete Applied Mathematics* **154** (2006), 1541-1546.

Abstract

Let G be a simple graph with vertex set V(G) and edge set E(G). A function $f : V(G) \rightarrow$ {-1,1} is said to be a signed majority dominating function of G if $\sum_{u\in N[v]} f(u) \geq 1$ for at least half of vertices v of G. The value

$min\{\sum_{v\in V(G)} f(v)|\ f$ is signed majority dominating function of G $\}$ is called the signed majority domination number and denoted by $\gamma_{maj}(G)$. If we have $\sum_{u\in N[v]} f(u) \geq 1$ for at least more than half of vertices v of G, then f is said to be signed strict majority dominating function of G. The value $min\{\sum_{v\in V(G)} f(v)|\ f$ is signed majority dominating function of G $\}$ is called the signed strict majority domination number and denoted by $\gamma^s_{maj}(G)$. Also f is said to be a signed k-subdominating function of G if $\sum_{u\in N[v]} f(u) \geq 1$ for at least k vertices v of G. The signed k-subdomination number, denoted by $\gamma_{ks}(G)$, is

$min\{\sum_{v\in V(G)} f(v)|\ f$ is signed k-subdominating function of G $\}$.

In this thesis and in chapters 2,3 and 4, we present all extant results about these three domination parameters. In chapters 5 and 6, we initiate the study of signed edge k-subdomination and signed star k-subdomination, respectively. A function $f : E(G) \rightarrow$ {-1,1} is a signed edge k-subdominating function of G if $\sum_{e'\in N[e]} f(e') \geq 1$ for at least k edges e of G. The value $min \sum_{e\in E(G)} f(e)$, taking the minimum over all signed egde k-subdominating functions of G, is called the signed edge k-subdomination number and denoted by $\gamma'_{ks}(G)$. If we have $\sum_{e\in E[v]} f(e) \geq 1$ for at least k vertices v of G, where $E(v) = \{uv|uv \in E(G)\}$, then f is said to be signed star k-subdominating function of G. The signed star k-subdomination number, denoted by $\gamma^k_{ss}(G)$, is $min \sum_{e\in E(G)} f(e)$, where the minimum is taking over all signed star k-subdominating functions of G.

Keywords: signed majority dominating function, signed majority domination number, signed strict majority dominating function, signed strict majority domination number, signed k-subdominating function, signed k-subdomination number, signed edge k-subdominating function, signed edge k-subdomination number, signed star k-subdominating function, signed star k-subdomination number.

Ministry of Sciences, Researches, and Technology
Azarbayjan University of Tarbyat Moallem
Department of Mathematics

A Thesis Presented to the Department of Mathematics in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Master of Science

in

Mathematics

Majority Domination Number in Graphs

Supervisor
S. M. Sheikholeslami (Ph.D.)

Consultant
B. Kheirfam

By:

Reza Saei Dinvar

January 2008
Tabriz - Iran